

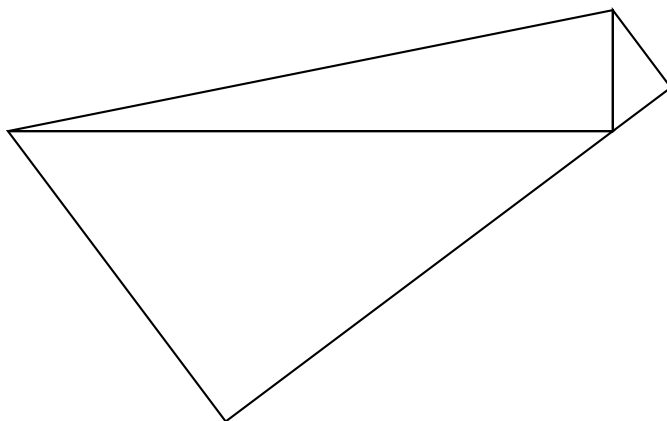
Úlohy na goniometrické funkce (středoškolské)

Trigonometrická definice goniometrických funkcí

1. Odvoďte z trigonometrické definice hodnoty goniometrických funkcí pro $x = \pi/6$, $x = \pi/4$, $x = \pi/3$.

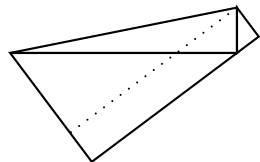
NÁVOD: použijte rovnostranný trojúhelník a rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník.

2. Na obrázku vidíte tři pravoúhlé trojúhelníky. Tři úhly na dolní pravé straně se skládají na přímý úhel. Označte velikosti úhlů nalevo α , β a pomocí α , β vyjádřete nejdříve velikosti ostatních úhlů a poté velikosti odvěsen těchto tří trojúhelníků, víte-li, že největší přepona má jednotkovou délku.



3. Použijte výsledky předchozího příkladu k odvození součtových vzorců pro sinus a kosinus.

NÁVOD: Do obrázku nahoře dokreslete odvěsnu:



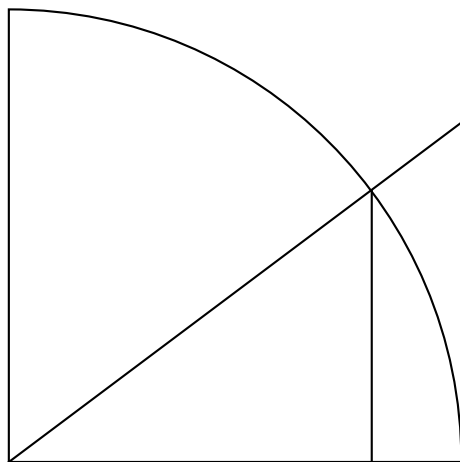
Nebo použijte vylepšení obrázku od jednoho studenta – doplňte jej na obdélník a případně pak obdélník postavte na jednu z jeho stran.

Definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici

4. Odvoďte z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici hodnoty goniometrických funkcí v bodech $\pi/6$, $\pi/2$, $4\pi/3$, $7\pi/4$, $25\pi/6$.
5. Z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici odvoďte vzorce

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin(x) & \cos(-x) &= \cos(x) & \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin(x + \pi) &= -\sin(x) & \sin(x + \pi/2) &= \cos(x)\end{aligned}$$

6. Hledejte další vztahy goniometrických funkcí, které lze odvodit z definice na jednotkové kružnici.
7. Na obrázku je čtvrtkruh o jednotkovém poloměru a dva podobné pravoúhlé trojúhelníky. Označte velikost společného úhlu těchto trojúhelníků φ a vyjádřete obsahy trojúhelníků jako funkci proměnné φ . Trojúhelníky vytínají na čtvrtkruhu výseč, vyjádřete obsah této výseče jako funkci proměnné φ .



Z odvozených obsahů sestavte dvě nerovnosti a z každé nerovnosti vyjádřete odhad pro podíl $\sin(\varphi)/\varphi$.