Úlohy na cvičení 18. února 2025 z AN2

1. Z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici odvoďte vzorce

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
$$\sin(x+\pi) = -\sin(x) \quad \sin(x+\pi/2) = \cos(x)$$

   Hledejte další vztahy goniometrických funkcí, které lze odvodit z definice na jednotkové kružnici.

2. Z axiomatické definice sinu a kosinu odvoďte
   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R} : \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R} : 1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2)$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R} : 1 + \cos(x) = 2\cos^2(x/2)$

3. Odvoďte vztahy pro derivaci funkce
   (a) kosinus přímo z definice
   (b) tangens, použijte vzorec pro derivaci podílu; odvoďte oba vzorce

$$\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$$

   (c) kotangens, použijte vzorec pro derivaci podílu; odvoďte oba vzorce

$$\mathrm{cotg}'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \mathrm{cotg}^2(x)$$

4. Určete Taylorův polynom
   (a) funkce kosinus v nule stupně patnáct
   (b) funkce tangens v nule stupně pět

5. Zjistěte monotonii funkce a použijte ji k výpočtu oboru hodnot funkce
   (a) (z velké části jsme spočítali na přednášce, na cvičení dělat nebudeme)

$$f(x) = \sin^3(x) - \cos^3(x)$$

   (b)

$$f(x) = \sin(x)\cos^3(x)$$

(c)
$$f(x) = 3\sin^2(x) + 4\cos^3(x)$$

(d)
$$f(x) = \sin(x) - \cos^2(x)$$

6. Vypočtěte hodnoty goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens, kotangens, znáte-li jednu z nich a pro jednoznačnost máte zadaný interval. K výpočtu použijte vzorce a výsledek vyjádřete ve tvaru s odmocninami. Nepočítejte hodnoty x, y.

   (a) $\sin(x) = 0.2$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$
   $\mathrm{cotg}(y) = 4$, $y \in [0, \pi]$

   (b) $\cos(x) = 0.4$, $x \in [\pi, 2\pi]$
   $\mathrm{tg}(y) = -2$, $y \in [\pi/2, 3\pi/2]$

(*7) Odvoďte vzorce (k odvození používejte výhradně axiomy, případně z nich odvozené vzorce)

a.

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2(x)}$$
$$\sin^2(x) = \frac{\mathrm{tg}^2(x)}{1 + \mathrm{tg}^2(x)}$$
$$\sin(x)\cos(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)}{1 + \mathrm{tg}^2(x)}$$

b.

$$\cos(x) = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)}$$
$$\sin(x) = \frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x/2)}$$

c.

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)$$

d.

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) - \cos(x-y)\right)$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) - \sin(x-y)\right)$$

(*8) Ukažte, že ze součtových vzorců

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$
$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

plyne, že jsou funkce s, c buď identicky rovné nule, nebo platí $s(0) = 0$, $c(0) = 1$.

Návod: dosaďte $y = 0$ a použijte znalosti lineární algebry.

(*9) Ukažte, že z definice funkcí sinus a kosinus na jednotkové kružnici plyne jejich spojitost v bodě nula.

Návod: dokazujte přímo z definice spojitosti a ukažte, že pro $x \in (0, \delta)$ je $\sin(x) \in (0, \delta)$, $\cos(x) \in (1 - \delta, 1)$.

Dále ukažte, že odtud plyne spojitost sinu a kosinu na $\mathbb{R}$.

Návod: buď použijte součtové vzorce, nebo postupujte obdobně jako výše u spojitosti v nule.