Úlohy na cvičení 8. dubna 2025 z AN2

1. Vraťte se k úlohám z minula, především k limitnímu podílovému kritériu absolutní konvergence řad (úloha 4 z minulého týdne).

2. Pro interval $I = [0,1]$, jeho dělení $x_i = i/n$ a funkci $f(x) = x^2$ vypočtěte dolní a horní integrální součet funkce f na intervalu I pro výše zadané dělení.

   K výpočtu použijte výsledek následující úlohy.

3. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

4. Nechť pro $H_i, D_i, x_i, x_{i+1}, f(c_i), \tilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} H_i &\leq (x_{i+1} - x_i)(f(c_i) + \tilde{\varepsilon}) \\ D_i &\geq (x_{i+1} - x_i)(f(c_i) - \tilde{\varepsilon}) \end{aligned}$$

   Ukažte, že platí

$$H_i - D_i \leq 2(x_{i+1} - x_i)\tilde{\varepsilon} \tag{1}$$

5. Nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je dělení intervalu $[a,b]$, nechť $\varepsilon > 0$. Nechť pro $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a pro $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ platí (1).

   Ukažte, že platí

$$\sum_{i=0}^{n-1} H_i - \sum_{i=0}^{n-1} D_i \leq \varepsilon \tag{2}$$

6. Nechť $I = [a,b]$ je interval, f je spojitá funkce na I. Nechť je HIS horní integrální součet funkce f přes interval I. Ukažte, že platí

$$HIS \geq (R) \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

7. Nechť $I = [a,b]$ je interval, f je spojitá funkce na I. Nechť je DIS dolní integrální součet funkce f přes interval I. Ukažte, že platí

$$DIS \leq (R) \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

8. Nechť I, f, HIS, DIS jako v předchozích dvou úlohách. Ukažte, že platí

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le HIS - DIS$$

9. Nechť $K \ge 0$, nechť $(\forall \varepsilon > 0)(K \le \varepsilon)$.

   Ukažte, že $K = 0$.

10. Nechť $I = [a, b]$ je interval, f funkce definovaná na I. Nechť ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení $x_0, x_1, \ldots, x_n$ intervalu $[a, b]$, splňující (2).

    Ukažte, že je f Riemannovsky integrovatelná na I.