Úlohy na cvičení 15. dubna 2025 z AN2

Prvních osm úloh je přeformulováno z minulého týdne.

1. Na ose x vyznačte body $x_i < x_{i+1}$, $c_i = (x_i + x_{i+1})/2$.

   Načrtněte graf funkce f na intervalu $I := [x_i, x_{i+1}]$.

   Zvolte $\tilde{\varepsilon} > 0$ tak, aby platilo

   $$(\forall x \in I)(f(x) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(f(c_i)))$$

   a na ose y vyznačte hodnoty $f(c_i) - \tilde{\varepsilon}$, $f(c_i) + \tilde{\varepsilon}$.

   Nad intervalem načrtněte obdélníky, jejichž obsahy odpovídají členům H_i, D_i horního a dolního integrálního součtu.

   Ukažte graficky, že platí

   $$\begin{aligned} H_i &\leq (x_{i+1} - x_i)(f(c_i) + \tilde{\varepsilon}) \qquad (1) \\ D_i &\geq (x_{i+1} - x_i)(f(c_i) - \tilde{\varepsilon}) \end{aligned}$$

2. Ukažte početně i graficky, že z (1) plyne

   $$H_i - D_i \leq 2(x_{i+1} - x_i)\tilde{\varepsilon} \qquad (2)$$

3. Nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je dělení intervalu $[a, b]$, nechť $\varepsilon > 0$. Nechť pro $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a pro $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ platí (2).

   Ukažte početně i graficky[1], že platí

   $$\sum_{i=0}^{n-1} H_i - \sum_{i=0}^{n-1} D_i \leq \varepsilon \qquad (3)$$

4. Nechť $I = [a, b]$ je interval, f je spojitá funkce na I. Nechť je DIS dolní integrální součet funkce f přes interval I.

   Napište definici dolního Riemannova integrálu a definici suprema a ukažte, že platí

   $$DIS \leq (R) \underline{\int_a^b} f(x) \, \mathrm{d}x \qquad (4)$$

[1] Načrtněte obdélníčky, jejichž obsahy odpovídají výrazům z (2) a posuňte je vedle sebe na osu x.

5. Napište definici horního Riemannova integrálu a definici infima a ukažte, že platí
$$HIS \geq (R)\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

6. Nechť I, f, HIS, DIS jako v předchozích dvou úlohách. Ukažte, že platí
$$(R)\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq HIS - DIS$$

7. Nechť $K \geq 0$, nechť $(\forall \varepsilon > 0)(K \leq \varepsilon)$.

   Ukažte, že $K = 0$.

8. Nechť $I = [a, b]$ je interval, f funkce definovaná na I. Nechť ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení $x_0, x_1, \ldots, x_n$ intervalu $[a, b]$, splňující (3).

   Ukažte, že je f Riemannovsky integrovatelná na I.

9a Vypočtěte Riemannův a Newtonův integrál a pro kontrolu výsledku udělejte hrubý náčrtek obrazce, jehož obsahu je integrál roven.
$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{2\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

9b
$$\int_0^2 \exp(-2x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^2 x\exp(-2x)\,\mathrm{d}x$$

9c
$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_2^6 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

9d
$$\int_0^1 x^5\exp(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\pi} (\sin(x)+\cos(x))^2\,\mathrm{d}x$$

10a Napište definici primitivní funkce a pravidlo pro derivaci složené funkce.

Poté pro každou z funkcí f, g, h zvolte vhodně interval[2] a na tomto intervalu nalezněte primitivní funkce k funkcím f, g, h.
$$f(x) = -x^3, \quad g(x) = (\sin(x))' f(\sin(x)), \quad h(x) = \cos(x)\sin^3(x)$$

10b
$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = (x^2+1)' f(x^2+1), \quad h(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$$

[2] Interval volte otevřený a maximální možný.