Úlohy na cvičení 29. dubna 2025 z AN2

Připomínám nevyřešené úlohy z minulého týdne.

1a V zadání je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $p^2 < 4q$.

Ukažte, že funkce F je primitivní funkcí funkce f na intervalu I, který zvolte.

$$f(x) = \frac{1}{x+b}, \quad F(x) = \log(x+b)$$

1b

$$f(x) = \frac{1}{(x+b)^n}, \quad F(x) = \frac{1}{(1-n)(x+b)^{n-1}}$$

1c

$$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}, \quad F(x) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

1d

$$f(x) = \frac{1}{(x+b)^2+a^2}, \quad F(x) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+b}{a}\right)$$

1e

$$f(x) = \frac{2x+p}{x^2+px+q}, \quad F(x) = \log(x^2+px+q)$$

2a Nalezněte primitivní funkci k funkci h a určete otevřený interval, na kterém jste primitivní funkci našli.

$$h(x) = \frac{8x}{3+x}$$

2b

$$h(x) = \frac{2x^2+2x}{x^2+1}$$

2b

$$h(x) = \frac{x^3 - x^{-2}}{x^2}$$

3. V následující úloze máme zadaný otevřený interval I_1 a funkci g, která je rostoucí na intervalu I_1 a zobrazuje I_1 na I_2.

   Dále máme zadanou funkci f a naším úkolem je najít funkci F primitivní k f na intervalu I_2.

Místo F budeme hledat primitivní funkci k funkci h, kterou definujeme vztahem

$$h(x) = (F(g(x)))'$$

Použijeme pravidlo pro derivaci složené funkce a vztah $F' = f$ a dostaneme

$$h(x) = f(g(x))g'(x) \tag{1}$$

3a Načrtněte graf g na I_1 a určete $I_2 := \{g(x) : x \in I_1\}$.

Vypočtěte $h(x)$ ze vztahu (1) a vypočtěte funkci H primitivní k funkci h na intervalu I_1.

Vypočtěte inverzní funkci $g^{-1}(y)$ na I_2 a funkci $F(y) = H(g^{-1}(y))$ a ukažte, že je F primitivní funkce k funkci f na I_2.

$$g(x) = x^2, \quad I_1 = (0, \infty), \quad f(y) = \frac{4}{3 + \sqrt{y}}$$

3b

$$g(x) = x^2, \quad I_1 = (0, \infty), \quad f(y) = \frac{1 + \sqrt{y}}{1 + y},$$

3c

$$g(x) = \log(x), \quad I_1 = (0, \infty), \quad f(y) = \frac{\exp(3y) - \exp(-2y)}{\exp(y)},$$

3d

$$g(x) = \exp(x), \quad I_1 = \mathbb{R}, \quad f(y) = \frac{\log(y)}{y}$$