Okolí bodu, limity

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: (všechna ε jsou kladná čísla)
okolí $U_\varepsilon(a) \equiv (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ obsahuje čísla, která jsou na číselné ose od a vzdálená o méně než ε
pravé okolí $(a, a+\varepsilon)$ obsahuje čísla z okolí $U_\varepsilon(a)$, která jsou větší než a
levé okolí $(a-\varepsilon, a)$ obsahuje čísla z okolí $U_\varepsilon(a)$, která jsou menší než a
prstencové okolí $P_\varepsilon(a) \equiv (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}$ obsahuje čísla z okolí $U_\varepsilon(a)$ kromě bodu a

Rozšířená reálná osa: $\mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Body $\pm\infty$ rozšířené reálné osy nazýváme nevlastními body.

Okolí nevlastních bodů:
$U_a(+\infty) \equiv (a, +\infty)$
$U_a(-\infty) \equiv (-\infty, a)$
(zde je $a \in \mathbb{R}$)

Poznámky:
1. Písmeno U označující okolí je z německého slova umgebung.
2. Více nás zajímají taková okolí, která obsahují jen jeho blízké body – tedy pro malé hodnoty ε pro okolí vlastních bodů a v případě $\pm\infty$ pro velká a se stejným znaménkem jako $\pm\infty$ (znázorněte si okolí na číselné ose).

Limitu definujeme pomocí okolí

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

znamená, že ke každému okolí $U(L)$ bodu L existuje okolí $O(a)$ bodu a takové, že pro všechna $x \in O(a)$ platí $f(x) \in U(L)$.

Přitom za okolí O dosadíme:
pro oboustranné limity $x \to a$ prstencové okolí bodu a,
pro limitu zleva $x \to a^-$ levé okolí bodu a,
pro limitu zprava $x \to a^+$ pravé okolí bodu a.

Příklady:

1. $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ znamená:
   ke každému okolí $U(2)$ existuje okolí $P(5)$ takové, že pro všechna $x \in P(5)$ platí $f(x) \in U(2)$
   pomocí parametrů okolí ε, δ a matematických symbolů zapíšeme

   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta(5))(f(x) \in U_\varepsilon(2))$$

   totéž pomocí intervalů místo symbolů U, P

   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (5-\delta, 5) \cup (5, 5+\delta))(f(x) \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon))$$

   vše lze přepsat pomocí absolutní hodnoty a implikace

   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x-5| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon)$$

2. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$ znamená:
   ke každému okolí $U(+\infty)$ existuje levé okolí bodu -2 takové, že pro všechna x tohoto levého okolí platí $f(x) \in U(+\infty)$
   pomocí parametrů okolí a, δ a matematických symbolů zapíšeme

   $$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in (-2-\delta, -2))(f(x) \in U_a(+\infty))$$

   totéž pomocí intervalu místo symbolu U

   $$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in (-2-\delta, -2))(f(x) \in (a, +\infty))$$

   pomocí implikace

   $$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(x \in (-2-\delta, -2) \Rightarrow f(x) \in (a, +\infty))$$

3. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$ znamená
   ke každému okolí $U(1)$ existuje okolí $U(-\infty)$ takové, že pro všechna $x \in U(-\infty)$ platí $f(x) \in U(1)$
   pomocí parametrů okolí ε, a a matematických symbolů zapíšeme

   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in (a, +\infty))(f(x) \in U_\varepsilon(1))$$

   totéž pomocí intervalu místo symbolu U

   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in (a, +\infty))(f(x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon))$$

   pomocí absolutní hodnoty

   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in (a, +\infty))(|f(x) - 1| < \varepsilon)$$

Rozmyslete si:
$|x-2| < 3$ je ekvivalentní s $x \in (2-3, 2+3)$, po úpravě $x \in (-1, 5)$.
Obecněji $|x-a| < \delta$ je ekvivalentní s $x \in (a-\delta, a+\delta)$

Aritmetické operace s nekonečny

1. Sčítání
   pro $a \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned} +\infty + a &= +\infty \\ -\infty + a &= -\infty, \end{aligned}$$

   podobně pro opačné pořadí sčítanců (sčítání je i pro nekonečna komutativní)
   Součet dvou nekonečen

$$\begin{aligned} +\infty + \infty &= +\infty \\ -\infty - \infty &= -\infty \\ +\infty - \infty & \quad \text{není definované} \end{aligned}$$

2. Násobení
   pro $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ je

$$\begin{aligned} a \cdot +\infty &= +\infty \text{ pro } a > 0 \\ a \cdot +\infty &= -\infty \text{ pro } a < 0 \\ a \cdot -\infty &= -\infty \text{ pro } a > 0 \\ a \cdot -\infty &= +\infty \text{ pro } a < 0 \\ +\infty \cdot +\infty &= +\infty \\ +\infty \cdot -\infty &= -\infty \\ -\infty \cdot +\infty &= -\infty \\ -\infty \cdot -\infty &= +\infty \\ 0 \cdot \infty & \quad \text{není definované} \end{aligned}$$

3. Odčítání
   Podobně jako pro reálná čísla, i v případě $a, b \in \mathbb{R}^*$ definujeme

$$a - b = a + (-1) \cdot b$$

   tedy například

$$\begin{aligned} +\infty - (-\infty) & \quad +\infty \\ +\infty - (+\infty) & \quad \text{není definované} \end{aligned}$$

4. absolutní hodnota $| \pm \infty| = +\infty$

5. Dělení
   Podíl nahradíme součinem

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

přitom definujeme

$$\begin{aligned}\frac{1}{+\infty} &= 0\\ \frac{1}{-\infty} &= 0\end{aligned}$$

tedy pro $a \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned}\frac{a}{\infty} &= 0\\ \frac{\infty}{\infty} & \quad \text{není definované}\end{aligned}$$

Věta o aritmetice limit.
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a existují limity

$$\lim_{x\to a} f(x), \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

Pak platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\\ \lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)\\ \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\end{aligned}$$

pokud je pravá strana definovaná.

Věta o limitě a odmocnině.
Pokud je

$$\lim_{x\to a} f(x) = L > 0,$$

pak je

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$$

Je-li

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

a existuje okolí $\delta > 0$ bodu a, že pro $x \in P_\delta(a)$ je $f(x) \geq 0$, pak je

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = 0.$$

Je-li

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

pak je

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$$

Poznámka. Obě tvrzení (o aritmetice limit i o odmocnině) platí i pro jednostranné limity.