Věta o limitě složené funkce

28. února 2025

1. Věta o limitě složené funkce (VLSF). Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Nechť

$$\lim_{x \to a} g(x) = b, \qquad \lim_{y \to b} f(y) = c \tag{1}$$

Nechť je splněna alespoň jednu z podmínek

(i) f je spojitá v bodě b

(ii) existuje okolí $U(a)$ bodu a, že platí

$$\forall x \in U(a) : g(x) \neq b$$

Pak platí

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = c \tag{2}$$

2. Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$.

V případě (i) existuje okolí $U_\tau(b)$ bodu b takové, že

$$\forall y \in U_\tau(b) : f(y) \in U_\epsilon(c)$$

K τ existuje prstencové okolí $P_\delta(a)$ bodu a takové, že

$$\forall x \in P_\delta(a) : g(x) \in U_\tau(b)$$

(Na přednášce nakreslíme grafy f i g.)

Zvolme $x \in P_\delta(a)$ a označme $y = g(x)$. Pak je $y \in U_\tau(b)$ a odtud plyne, že

$$f(g(x)) = f(y) \in U_\epsilon(c) \tag{3}$$

V případě (ii) existuje prstencové okolí $P_\tau(b)$ bodu b takové, že

$$\forall y \in P_\tau(b) : f(y) \in U_\epsilon(c)$$

Pro $x \in P_\delta(a) \cap U(a)$ a $y = g(x)$ je $y \in P_\tau(b)$ a odtud plyne (3).

Z (3) plyne (2).

3. Poznámky.

1. V praktických výpočtech počítáme limitu substitucí.

   Pro limitu
   $$\lim_{x\to a} f(g(x)) \tag{4}$$
   spočítáme limitu vnitřní funkce
   $$L = \lim_{x\to a} g(x)$$
   a substitucí $y = g(x)$ převedeme (4) na limitu
   $$\lim_{y\to L} f(y)$$
   Budeme používat zápis
   $$\lim_{x\to a} f(g(x)) \overset{y=g(x)}{=} \lim_{y\to L} f(y)$$
   Je třeba ověřit, že alespoň jeden z předpokladů (i), (ii) platí.

2. Pro lineární substituci $y = kx + q$, $k \neq 0$ je podmínka (ii) splněna.

3. Podobně je podmínka (ii) splněna pro funkci g rostoucí na $(a-\delta, a+\delta)$.

   I pro funkci g klesající na $(a-\delta, a+\delta)$.

4. V případě $b \in \{+\infty, -\infty\}$ nemůže platit (i), zato vždy platí (ii).

5. Věta platí i pro jednostranné limity $x \to a^+$ případně $x \to a^-$.

6. Pro jednostrannou limitu zprava $x \to a^+$ a pro funkce g rostoucí na $(a, a+\delta)$ je předpoklad (ii) je splněn. Navíc lze ve větě v (1) nahradit limitu vnější funkce f za jednostrannou limitu pro $y \to b^+$ (načrtněte graf g).

   Podobně pro g klesající na $(a, a+\delta)$ a podobně pro limity zleva $x \to a^-$.

7. Pokud je splněna podmínka (i), je limita vnější funkce f rovna funkční hodnotě $f(b)$ a můžeme (2) přepsat na
   $$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

4. Příklady.

1. Vypočteme limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x} \overset{y=x/2}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{2y} = \frac{1}{2}$$

Je splněn předpoklad (ii), protože $g(x) = x/2$ je rostoucí na $\mathbb{R}$.

2.

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{arctg}(1/x) \overset{y=1/x}{=} \lim_{y\to\infty}\operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}$$

Je splněn předpoklad (ii).

3.

$$\lim_{x\to\pi^+}\operatorname{tg}(x/2) \overset{y=x/2}{=} \lim_{y\to(\pi/2)^+}\operatorname{tg}(y) = -\infty$$

Je splněn předpoklad (ii).

4.

$$\lim_{x\to\pi^-}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\operatorname{tg}(x/2)) \overset{y=\operatorname{tg}(x/2)}{=} \lim_{y\to\infty}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,y) = \frac{\pi}{2}$$

Je splněn předpoklad (ii).

5.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\operatorname{arctg}(x)} \overset{VLSF}{=} \sqrt{\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}(x)} = \sqrt{\pi/2}$$

Je splněn předpoklad (i).

6.

$$\lim_{x\to 0^+}\exp(-1/x) \overset{y=-1/x}{=} \lim_{y\to-\infty}\exp(y) = 0$$

Je splněn předpoklad (ii).

5. Poznámka. Jedna z implikací v Heineho větě:

Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní posloupnost s limitou $L \in \mathbb{R}$. Nechť f je funkce spojitá v bodě L. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(L)$$

je v podstatě věta o limitě složené funkce. Stačí si připomenout, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zobrazení $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s funkční hodnotou $g(n) = x_n$.