

## Příklady z předmětu AN3E – derivace funkcí více proměnných

1. Pro funkci

$$f : (x, y) \mapsto \left( \frac{x^3}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{x^4 y^2}{3x^4 + 4y^2}, \arctg(xy) \right)$$

- (a) Ukažte, že je možné  $f$  spojitě rozšířit do bodu  $O = (0, 0)$ . Toto rozšíření označíme  $g$ .
- (b) Ukažte, že funkce  $g$  má v bodě  $O$  silnou derivaci a tuto silnou derivaci vypočtěte.
- (c) Vypočtěte derivaci funkce  $g$  podle vektoru  $\mathbf{v}$  v bodě  $(0, 0)$ .
- (d) Vypočtěte derivaci funkce  $g$  podle vektoru  $\mathbf{v}$  v bodě  $(1, -1)$ .

2. Pro funkci

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y^3}{3x^4 + 4y^4}$$

- (a) Ukažte, že je možné  $f$  spojitě rozšířit do bodu  $O = (0, 0)$ . Toto rozšíření označíme  $g$ .  
Návod: omezenost výrazu  $\frac{x^2 y^2}{3x^4 + 4y^4}$  ukažte pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.
- (b) Vypočtěte derivaci funkce  $g$  v počátku podle vektoru  $\mathbf{v}$ .
- (c) Má funkce  $g$  v bodě  $(0, 0)$  slabou derivaci?
- (d) Má funkce  $g$  v bodě  $(0, 0)$  silnou derivaci?

3. Kterou z funkcí je možné spojitě rozšířit do počátku?

- (a)  $f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x-y}{x^2+y^2}$
- (b)  $f_2 : (x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
- (c)  $f_3 : (x, y) \mapsto \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

4. Projděte podrobně cvičení 14.27 na straně 97 v [IK2] a všechna tvrzení zdůvodněte.