Písemná část zkoušky z předmětu AN3E
11. ledna 2017

Jméno a příjmení:

(Toto je formát písemky z AN3E, která bude obsahovat čtyři příklady.)

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

1. Kterou z funkcí f_1, f_2, f_3 je možné spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?
$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^3}{x^2 + y^2} \qquad f_2 : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$$
2. Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $[2, -1]$ podle vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Tyto derivace jsou směrnicemi tečen ke křivkám – k jakým? Jak tyto křivky získáte z grafu funkce f?
$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^3 - y}{x + y} \qquad \mathbf{u} = (4, -3) \qquad \mathbf{v} = (\tfrac{4}{5}, \tfrac{-3}{5})$$
3. Zjisttěte podle kterých vektorů je derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0 = [\frac{3}{4}, \frac{9}{4}]$ nulová. Jakou vzájemnou polohu má tento vektor vzhledem k vrstevnici funkce f? Podle kterého jednotkového vektoru je derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ maximální a podle kterého minimální?
$$f : (x, y) \mapsto x^2 - xy$$
4. Zjistěte, zda má funkce f v bodě $[0, 0]$ derivaci. Funkce f vznikne spojitým rozšířením funkce g.
$$g : (x, y) \mapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
5. Nalezněte stacionární body funkce f a určete jejich typ. Jakou polohu má tečná rovina ve stacionárních bodech vzhledem k souřadným osám a souřadným rovinám?
$$f : (x, y) \mapsto x^2 - xy + y^3 - 2y^2 - 3y$$
6. Zdůvodněte, že funkce f nabývá na trojúhelníku o vrcholech $[-2, 0]$, $[0, 3]$, $[3, 0]$ minimální a maximální hodnoty a tyto hodnoty vypočtěte.
$$f : (x, y) \mapsto x^2 - xy$$

7. Zdůvodněte, že funkce f nabývá na kružnici o rovnici $x^2 - 4x + y^2 - 5y$ minimální a maximální hodnoty a tyto hodnoty vypočtěte. Dále kružnici zakreslete do souřadné soustavy, nalezněte graficky body, v nichž funkce f nabývá extrémů a porovnejte s vypočtenými body.
$$f : (x, y) \mapsto 2x + 3y$$

8. Vypočtěte obsah a souřadnice těžiště obrazce O. Před výpočtem obrazec zakreslete do soustavy souřadné a odhadněte počítané veličiny. Vypočtené výsledky porovnejte s jejich odhady.
$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x\}$$

9. Vypočtěte vzdálenost těžiště polokoule o poloměru R od středu příslušné koule. Před výpočtem výsledek odhadněte a svůj odhad porovnejte s vypočtenou hodnotou.

10. Vypočtěte poloměr konvergence mocninné řady. Co z vypočteného poloměru lze usoudit o oboru konvergence a absolutní konvergence řady? Znázorněte graficky.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,3^k}{(k+3)2^k}(z+2)^k$$

11. Rozviňte funkci f v mocninnou řadu v bodě $z_0 = 0$, určete její poloměr konvergence a zakreslete kruh konvergence do komplexní roviny.
$$f : (x, y) \mapsto \frac{2z}{3 + z}$$

12. Rozviňte funkci f v mocninnou řadu v bodě $z_0 = 0$, určete její poloměr konvergence a zakreslete kruh konvergence do komplexní roviny.
$$f : (x, y) \mapsto \frac{2z}{z^2 - 6z + 8}$$