Požadavky ke zkoušce z AN3E

3. ledna 2018

1. Euklidovský skalární součin a jeho vlastnosti (pozitivita, symetrie, linearita) včetně důkazu jejich platnosti. Euklidovská norma vektoru a její vlastnosti (pozitivita, norma násobku, subaditivita) včetně důkazu jejich platnosti. Euklidovská vzdálenost a její vlastnosti (pozitivita, symetrie, trojúhelníková nerovnost) včetně důkazu jejich platnosti.

   Okolí bodu v $\mathbb{R}^d$, definice limity posloupnosti a funkce. Výpočet limity (posloupnosti a funkce do $\mathbb{R}^d$) po složkách – formulace věty a hlavní myšlenka jejího důkazu.

   Limity funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, výpočet limity po přímkách a souvislost s limitou funkce. Příklad funkce dvou proměnných, která má v bodě limity po přímkách, jsou si rovny, ale nemá limitu ($(x, y) \mapsto xy^2/(x^2 + y^4)$).

   Věta o limitě součinu funkce s nulovou limitou a omezené funkce a použití věty na limity funkcí více proměnných.

   Zdroj: [3]

2. Definice parciální derivace, derivace podle vektoru a jejich geometrický význam. Parciální derivace jako speciální typ derivace podle vektoru.

   Derivace funkce jako lineární aproximace, rovnice tečné roviny. Věta o existenci derivace za předpokladu spojitých parciálních derivací a její důkaz pro funkci dvou proměnných (v [2], věty 2.19, 2.20 je pro funkci n proměnných).

3. Normované a metrické prostory, definice a příklady, součtová a maximová metrika a od ní odvozená norma. Diskrétní metrika. Koule a sféry v jednotlivých metrikách. Vnitřní, hraniční a vnější body, otevřené a uzavřené množiny. Kompaktní množiny a věta o existenci extrémů spojité funkce na kompaktní množině. Hromadné a izolované body množiny, vysvětlení na konkrétních příkladech.

4. Stacionární body funkce více proměnných, geometrický význam (poloha tečen, tečné roviny vzhledem k souřadným osám a souřadným rovinám). Lokální extrémy, kvadratické formy, typy kvadratických forem (pozitivně definitní, negativně definitní, indefinitní) a metody zjišťování typu kvadratické formy. Taylorův polynom druhého stupně pro funkci dvou proměnných, souvislost extrému s typem kvadratické formy. Kompaktní množiny a věta o existenci extrémů spojité funkce na kompaktní množině. Vázané extrémy, metoda Lagrangeových multiplikátorů.

5. Obsah a objem v Riemannovském a Lebesgueovském smyslu. Obsah množiny $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (racionálních čísel).
   Dvojné a dvojnásobné integrály, Fubiniova věta. Trojné a trojnásobné integrály. Výpočet dvojného integrálu v polárních souřadnicích. Jacobiho matice, jakobián, geometrický význam – plocha průniku výseče a mezikruží. Výpočet trojného integrálu

ve sférických souřadnicích, výpočet jakobiánu. Obecná substituce ve dvojném integrálu a výpočet jakobiánu.

6. Poslounosti a řady funkcí. Příklad posloupnosti spojitých funkcí s nespojitou limitou ($\{x \mapsto \sin^{2n} x\}_{n=1}^{\infty}$).
   Komplexní čísla, goniometrický tvar komplexního čísla, zobrazení komplexního čísla v rovině, grafické násobení komplexních čísel. Absolutní hodnota komplexního čísla, odvození vzorce pro absolutní hodnotu součinu a podílu komplexních čísel.
   Limita posloupnosti komplexních čísel, geometrická posloupnost a geometrická řada v oboru komplexních čísel, součet geometrické řady, odvození součtu včetně podmínky pro konvergenci.
   Mocninné řady. Lemma o konvergenci mocninné řady v bodě a absolutní konvergenci v bodě bližším středu a jeho důkaz ([1], lemma 2.2.3, str. 48) a jednodušší důkaz v případě absolutní konvergence ve vzdálenějším bodě.

Reference

[1] Jiří Veselý. Úvod do komplexní analýzy.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma12-13/TUL/KOMPL/kompl_upr_lib.pdf`.

[2] Luděk Zajíček. Skirpta.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~zajicek/skriptamn.htm`.

[3] M. Š. Skalární součin, norma vektoru, vzdálenost, limity.
na `https://kap.fp.tul.cz/~simunkova`.