Vzorová písemka z předmětu AN3E
21. prosince 2017

Jméno a příjmení:

(Toto je formát písemky z AN3E, která bude obsahovat čtyři příklady.)

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

1. Kterou z funkcí f_1, f_2, f_3 je možné spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^3}{x^2 + y^2} \qquad f_2 : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$$

2. Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $[2, -1]$ podle vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Výpočet proveďte přímo z definice derivace podle vektoru.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^3 - y}{x + y} \qquad \mathbf{u} = (4, -3) \qquad \mathbf{v} = (\tfrac{4}{5}, \tfrac{-3}{5})$$

3. Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $[0, 1]$ podle vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Tyto derivace jsou směrnicemi tečen ke křivkám – k jakým? Jak tyto křivky získáte z grafu funkce f?

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x - y}{x^2 + y}$$

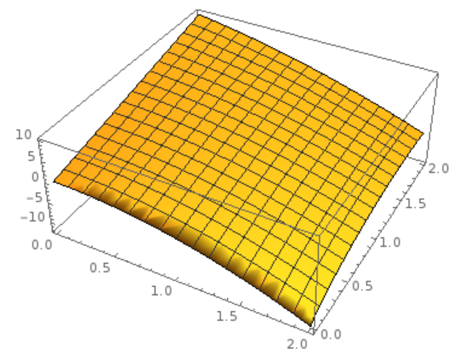
4. Zjistěte podle kterých vektorů je derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0 = [\frac{3}{4}, \frac{9}{4}]$ nulová. Jakou vzájemnou polohu má tento vektor vzhledem k vrstevnici funkce f? Podle kterého jednotkového vektoru je derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ maximální a podle kterého minimální?

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - xy$$

5. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $\mathbf{a} = [1, 1]$.

$$f : (x, y) \mapsto x^2\sqrt{y} - xy^2 + 5y - 3x^2$$

Na obrázku je graf funkce f. Dokreslete do něj průsečnici tečné roviny se souřadnou rovinou xy. Z rovnice tečné roviny odvoďte rovnici této průsečnice a porovnejte s obrázkem.



6. Nalezněte stacionární body funkce f a určete jejich typ. Jakou polohu má tečná rovina ve stacionárních bodech vzhledem k souřadným osám a souřadným rovinám?

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - xy + y^3 - 2y^2 - 3y$$

7. Nalezněte maximální a minimální hodnotu, kterou nabývá funkce f na množině M. Načrtněte množinu M a vyznačte na ní body, v nichž funkce f nabývá extrémních hodnot.

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + 7x + xy^2, \quad M \text{ je parabola o rovnici } y = x^2 - x - 3$$

8. Nalezněte maximální a minimální hodnotu, kterou nabývá funkce f na množině M. Načrtněte množinu M a vyznačte na ní body, v nichž funkce f nabývá extrémních hodnot a ke každému z těchto bodů načrtněte vrstevnici funkce f, která jím prochází.

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + xy, \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \geq y \geq x^2 - 1\}$$

9. Zdůvodněte, že funkce f nabývá na trojúhelníku o vrcholech $[-2, 0]$, $[0, 4]$, $[3, 0]$ minimální a maximální hodnoty a tyto hodnoty vypočtěte.

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - xy + y$$

10. Zdůvodněte, že funkce f nabývá na kružnici o rovnici $x^2 - 4x + y^2 - 5y = 0$ minimální a maximální hodnoty a tyto hodnoty vypočtěte. Dále kružnici zakreslete do souřadné soustavy, nalezněte graficky body, v nichž funkce f nabývá extrémů a porovnejte s vypočtenými body.

$$f : (x, y) \mapsto 2x + 3y$$

11. Zdůvodněte, že funkce f nabývá na elipse o rovnici $x^2 - 4x + 2y^2 - 5y = 0$ minimální a maximální hodnoty a tyto hodnoty vypočtěte. Dále elipsu zakreslete do souřadné soustavy, nalezněte graficky body, v nichž funkce f nabývá extrémů a porovnejte s vypočtenými body.

$$f : (x, y) \mapsto 2x + 3y$$

12. Množina M je trojúhelník ABC, popište množiny $M_{x,*} = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\}$. Pro která $x \in \mathbb{R}$ je $M_{x,*}$ prázdná množina? Pro která x jednoprvková množina? Pro která x interval? Napište tyto intervaly.

    To samé udělejte pro množiny $M_{*,y} = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\}$.

$$A = [-1, 0], \quad B = [2, 0], \quad C = [1, 3]$$

13. Vypočtěte dvojný integrál funkce f přes trojúhelník ABC

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - y, \quad A = [-1, 0], B = [2, 0], C = [1, 3]$$

14. Vypočtěte obsah a souřadnice těžiště obrazce $\mathcal{O}$. Před výpočtem obrazec zakreslete do soustavy souřadné a odhadněte počítané veličiny. Vypočtené výsledky porovnejte s jejich odhady.

$$\mathcal{O} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x\}$$

    Návod: obsah obrazce vypočteme dvojným integrálem $O = \iint 1 \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y$ a polohu těžiště $T = [\iint x \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y/O, \iint y \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y/O]$. Ve všech případech integrujeme přes obrazec $\mathcal{O}$.

15. Vypočtěte vzdálenost těžiště polokoule o poloměru R od středu příslušné koule. Před výpočtem výsledek odhadněte a svůj odhad porovnejte s vypočtenou hodnotou.

    Návod: poloha těžiště $T = [\iiint x \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,z/V, \iiint y \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,z/V, \iiint z \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,z/V]$, kde V je objem tělesa, jehož těžiště počítáme. Všechny trojné integrály jsou přes zadanou polokouli.

16. Vypočtěte obsah rovnoběžníku $ABCD$ daného vrcholy $A = [-1, 0]$, $B = [0, -1]$, $C = [2, 1]$.

    (a) Prostředky elementární geometrie.
    (b) Jako dvojný integrál z konstantní funkce rovné jedné přes tento rovnoběžník.
    (c) Substitucí integrálu v předchozím bodě, která převede rovnoběžník na obdélník.

17. Vypočtěte poloměr konvergence mocninné řady. Co z vypočteného poloměru lze usoudit o oboru konvergence a absolutní konvergence řady? Znázorněte graficky.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,3^k}{(k+3)2^k}(z+2)^k$$

18. Rozviňte funkci f v mocninnou řadu se středem v bodě $z_0 = 0$, napište první čtyři nenulové členy této řady, určete její poloměr konvergence a zakreslete kruh konvergence do komplexní roviny.

$$f : z \mapsto \frac{2z}{3+z}$$

19. Rozviňte funkci f v mocninnou řadu se středem v bodě $z_0 = 1$, napište první čtyři nenulové členy této řady, určete její poloměr konvergence a zakreslete kruh konvergence do komplexní roviny.

$$f : z \mapsto \frac{2z}{z^2 - 6z + 8}$$