Kapitola 2

Mocninné řady

2.1 Úvod

V této kapitole je vyložen aparát mocninných řad. Shrnujeme v ní vlastnosti obecně známé z elementárních učebnic (reálné) analýzy a uvádíme i některé vlastnosti složitější; viz např. [Z], Kapitola 16. Čtenář ji může zběžně projít a vrátit se k ní pouze v případě, že by něčemu o mocninných řadách dále nerozuměl. Pokud je s mocninnými řadami v komplexním oboru již seznámen, může tuto kapitolu přeskočit. Důležité pojmy jsou opět graficky vyznačeny **polotučnou antikvou**, i když patrně nebudou pro čtenáře nové. Připomínáme, že u sumačních znaků budeme opět *vynechávat meze v případě, že se sčítá od* 0 *do* ∞. Na konci kapitoly připomínáme užitečné věty, které se *někdy* v reálné analýze dokazují; my je dokážeme později, jakmile budeme mít k dispozici základní tvrzení teorie komplexních funkcí komplexní proměnné.

2.2 Základní vlastnosti

Definice 2.2.1. Nechť $z_0, a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Řada funkcí (proměnné z) tvaru

$$\sum a_k (z - z_0)^k \,, \tag{2.1}$$

se nazývá **mocninná řada**. Čísla a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, jsou **koeficienty** řady (2.1) a číslo z_0 je její **střed**.

Příklad 2.2.2. Nejjednodušším netriviálním příkladem mocninné řady (a zároveň velmi důležitým) je **geometrická řada** s prvním členem rovným 1, která zřejmě konverguje právě pro ta $z \in \mathbb{C}$, pro něž $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \,.$$

Tento vzorec je pro $z \in (-1, 1)$ standardní částí středoškolské látky, často se však uvádí bez odůvodnění konvergence; viz [Z], Příklad 3.1.4, str. 76.

Mocninná řada (2.1) konverguje vždy alespoň v bodě z_0; v komplexní rovině $\mathbb{C}$ má přitom velmi jednoduché konvergenční chování. To vyplývá z následujícího tvrzení, které pochází od Nielse Henrika Abela (1802 – 1829).

Lemma 2.2.3 (Abel 1826). *Jestliže mocninná řada* (2.1) *konverguje v bodě* $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta \neq z_0$, *pak konverguje* absolutně *pro všechna* $z \in \mathbb{C}$, *vyhovující nerovnosti*

$$|z - z_0| < |\, \zeta - z_0| \,. \tag{2.2}$$

Důkaz. Nechť $\zeta \neq z_0$ a nechť $z \in \mathbb{C}$ vyhovuje nerovnosti (2.2). Protože řada (2.1) konverguje v bodě ζ, platí $\lim_{k\to\infty} |a_k(\zeta - z_0)| = 0$ a existuje tedy číslo $M \in \mathbb{R}_+$ tak, že $|a_k(\zeta - z_0)| \le M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Je tedy

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k(\zeta - z_0)^k| \cdot \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^k \le M \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^k \tag{2.3}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Pro (2.1) jsme tak našli konvergentní majorantu; je jí geometrická řada s kvocientem menším než 1. □

Definice 2.2.4. Říkáme, že **mocninná řada konverguje** nebo **je konvergentní**, konverguje-li alespoň ve *dvou různých* bodech. Číslo R, $0 \le R \le +\infty$,

$$R := \sup_{z\in\mathbb{C}} \{|z - z_0|;\ \sum a_n(z - z_0)^n \text{ konverguje v bodě } z\} \tag{2.4}$$

se nazývá **poloměr konvergence** řady (2.1). Je-li $R > 0$, nazývá se množina

$$U(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - z_0| < R\}$$

kruh konvergence řady (2.1).

Tato terminologie je vcelku přirozená. Z Lemmatu 2.2.3 a z definice suprema vyplývá, že řada (2.1) konverguje v kruhu $U(z_0, R)$ a diverguje pro všechna z, $|z - z_0| > R$ [1]). Zdůrazněme ještě jednu důležitou vlastnost: U geometrické řady je v kruhu konvergence $U(0, 1)$ *posloupnost členů řady omezená* a vně $U(0, 1)$ není *omezená.* Tuto vlastnost mají i obecné mocninné řady.

Lemma 2.2.5. *Posloupnost členů mocninné řady* (2.1) *je v každém bodě kruhu konvergence omezená a není omezená v žádném bodě z doplňku jeho uzávěru. Platí tedy*

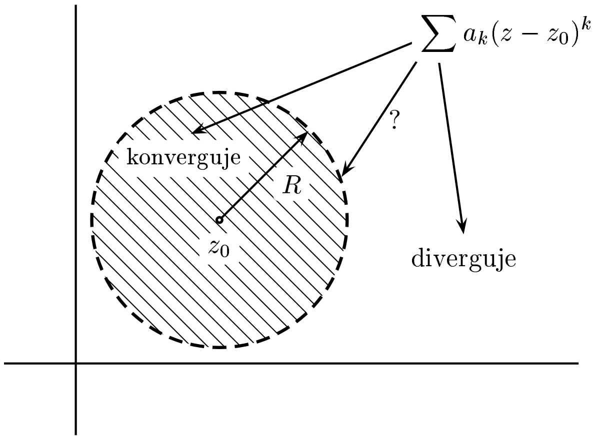
$$R = \sup\{t \ge 0;\ \text{posloupnost } \{|a_k|t^k\} \text{ je omezená}\}\,.$$

---

[1]) Jestliže pro poloměr konvergence R platí $0 < R < \infty$, nazývá se někdy množina $\{z; |z - z_0| = R\}$ **konvergenční kružnice**; tento název není příliš šťastně utvořen, neboť vzbuzuje dojem, že řada v bodech této množiny konverguje. Právě pro ně však *nelze* o konvergenci mocninné řady (2.1) obecně nic říci.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že předpoklad zaručuje možnost odhadu (2.3) z důkazu Lemmatu 2.2.3. □

Příklady 2.2.6. 1. Řady $\sum (k!)z^k$ a $\sum z^k/k!$ ukazují, že pro poloměr konvergence mohou nastat i extrémní případy $R = 0$ a $R = +\infty$. Poloměr konvergence R těchto dvou řad lze určit např. pomocí podílového (d'Alembertova) kritéria.



Obr. 2.1: Konvergence mocninné řady

2. Řada $\sum z^k/a^k$ pro $a \in (0, \infty)$ má poloměr konvergence $R = a$. Z limitní verze Cauchyho odmocninového kritéria (viz [Z], str. 89) plyne s ohledem na rovnost

$$\sqrt[k]{|z^k/a^k|} = |z|/a$$

konvergence pro všechna $z \in U(0, a)$ a divergence pro všechna z, pro něž je $|z| > a$.

3. Uvažte, že řady

$$\sum z^k\,, \qquad \sum z^{k+1}/(k+1)\,, \qquad \sum z^{k+2}/((k+1)(k+2))$$

mají poloměr konvergence $R = 1$ a na hranici $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ kruhu konvergence $U(0, 1)$ se chovají rozdílně; prvá na ní všude diverguje, protože neplatí $z^k \to 0$, druhá konverguje v bodě -1 a diverguje v bodě 1, třetí na ní konverguje všude.

Úmluva 2.2.7. Absolutní konvergence řady (2.1) v bodě z závisí v následujícím smyslu na vzdálenosti $|z - z_0|$: Substitucí $z = z_0 + w$ lze vyšetřování konvergence řady (2.1) převést na vyšetřování řady $\sum a_k w^k$ se středem 0. Proto se v dalším textu budeme omezovat na řady o středu $z_0 = 0$. Tvrzení budeme vždy vyslovovat pro řady v obecném tvaru (2.1), budeme je však dokazovat pouze pro případ $z_0 = 0$, tj. pro řadu

$$\sum a_k z^k\,, \tag{2.5}$$