16.4 Abelova věta a sčítatelnost

Důkaz následujícího důležitého tvrzení lze založit na Větě 14.7.2, my ho však provedeme nezávisle na této větě přímo.

Věta 16.4.1 (Abel 1826). *Nechť $\zeta \neq z_0$ a řada $\sum a_n(\zeta - z_0)^n$ konverguje. Označme*

$$f(z) := \sum a_n(z - z_0)^n .$$

Potom platí

$$\lim_{x \to 1-} f(z_0 + x(\zeta - z_0)) = f(\zeta) .$$

Důkaz plyne z následujícího lemmatu. Zvolíme-li v něm $b_n = a_n(\zeta - z_0)^n$, je zřejmé, že řada $\sum b_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum a_n(\zeta - z_0)^n$ a

$$f(z_0 + x(\zeta - z_0)) = \sum a_n(x(\zeta - z_0))^n = \sum b_n x^n .$$

Stačí tedy předcházející tvrzení dokázat pro speciální případ.

Věta 16.4.2 (Abel 1826). *Nechť $\sum b_n$ konverguje. Položme*

$$f(x) = \sum b_n x^n , \quad x \in (-1, 1) .$$

Potom je $\lim_{x \to 1-} f(x) = \sum b_n$.

Důkaz. Položme $s_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $s_{-1} = 0$. Potom (srovnej s Abelovou parciální sumací z Lemmatu 8.5.2)

$$\sum_{n=0}^{k} b_n x^n = \sum_{n=0}^{k} (s_n - s_{n-1})\, x^n = s_k x^k + (1 - x) \sum_{n=0}^{k-1} s_n x^n .$$

Pro každé x, $|x| < 1$, proveďme limitní přechod pro $k \to \infty$. Protože $|s_n|$ je konvergentní a tedy i omezená posloupnost, je

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} b_n x^n = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n , \quad x \in (-1, 1) . \qquad (16.15)$$

Je-li $s = \lim_{n \to \infty} s_n = \sum b_n$ a $\varepsilon > 0$, pak lze nalézt $m \in \mathbb{N}$ tak, že je $|s - s_n| < \varepsilon/2$ pro všechna $n \geq m$. Ze znalostí o geometrické řadě dostáváme

$$(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 , \quad x \in (-1, 1) .$$

Protože $\lim_{x \to 1-} (1 - x) \sum_{n=0}^{m} |s_n - s| = 0$, existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna x, $1 - \delta < x \leq 1$, dostaneme odhad

$$|f(x) - s| = \left|(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n\right| \leq (1 - x) \sum_{n=0}^{m} |s_n - s| \cdot |x|^n + \varepsilon/2 < \varepsilon ,$$

ze kterého již vyplývá tvrzení. □

Příklad 16.4.3. V Poznámce 16.2.10 jsme pro arkustangentu připomněli tvar Maclaurinova rozvoje (16.9). Dosaďme do něj $x = 1$. Dostaneme Leibnizovu řadu (její konvergence je důsledkem Leibnizova kriteria pro řady se střídavými znaménky)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} .$$

Ze spojitosti funkce arctg na $\mathbb{R}$ a z Abelovy věty dostaneme rovnosti

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} . \qquad (16.16)$$

O tomto velmi starém výsledku jsme se zmínili již v Kapitole 3 v Příkladu 3.3.2.

16.5 Cauchyho součin řad

Ve velmi přirozených situacích se setkáváme s problémem násobení řad. Tak např. v Příkladu 16.5.7 lze určit rozvoj funkcí $\cos^2$ a $\sin^2$ podle definice, ale pokud bychom uměli najít řadu pro součin sinu a kosinu, mohli bychom postupovat rychleji. Věnujme se tedy problému násobení řad.

Násobíme-li konečné součty, zřejmě je

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{l=1}^{m} b_l\Big) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_k b_l = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} a_k b_l .$$

Zkoumáme-li analogickou situaci pro číselné řady, vynoří se před námi řada otázek. Již samotná definice *součinu řad* není jednoduchým problémem: pro *řady* by mělo patrně formálně platit cosi jako

$$\Big(\sum a_k\Big)\Big(\sum b_l\Big) = \sum_{[k,l] \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} a_k b_l \qquad (16.17)$$

kde na pravé straně by se mělo nějak sčítat „přes všechny uspořádané dvojice $[k, l]$ čísel z $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ a, samozřejmě, přes žádnou dvakrát“. Pokud obě řady budou konvergentní a $\sum a_k = a$, $\sum b_l = b$, bylo by žádoucí, aby symbol vpravo byl interpretovatelný také jako řada o součtu rovném ab.

K cíli vede více cest: Problém definice součinu řad spočívá v „součtu přes spočetnou množinu“, tj. v definici symbolu

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha \qquad (16.18)$$

pro spočetnou, ne nutně uspořádanou, množinu A. My se spokojíme s cestou, která je nejstarší.

Ta vede přes práci s *přirozeným* uspořádáním dvojic v symbolu na pravé straně