Derivace funkce více proměnných

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
21. prosince 2017

1. Parciální derivace.
Ve výrazu $f(x,y)$ považujeme za proměnnou jen x a proměnnou y považujeme za konstantu. Zderivujeme podle x a dostaneme *parciální derivaci* podle proměnné x. Obdobně dostaneme *parciální derivaci* podle y.

Značení:
Derivaci značíme $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x, $\frac{\partial f}{\partial y}$, f'_y. Hodnotu derivace v bodě $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ značíme $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$, $f'_x(\mathbf{a})$, případně $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$.

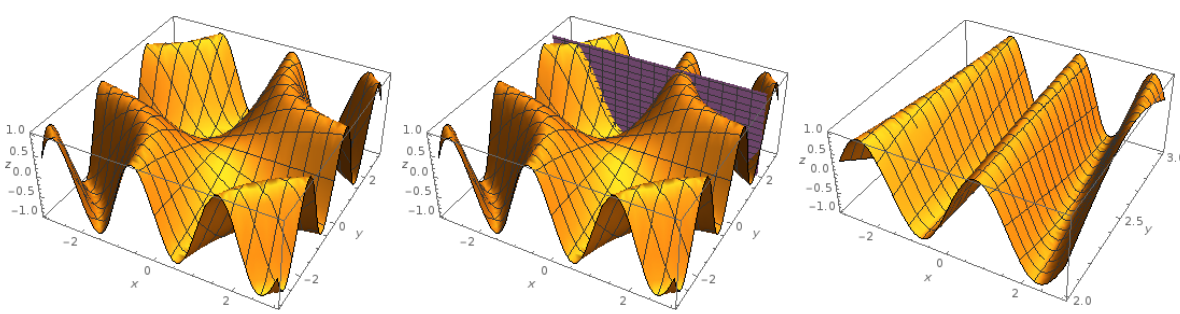
Příklad $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 - x\sin y}$.
$\frac{\partial f}{\partial x} = 1/2(x^2 - x\sin y)^{-1/2}(2x - \sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1/2(x^2 - x\sin y)^{-1/2}(-x\cos y)$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(2, \pi/6) = 1/2(4 - 2\sin\pi/6)^{-1/2}(4 - \sin\pi/6) = 7/(4\sqrt{3})$.

Příklady na procvičování: [3], str. 99, příklady 14.29 – 14.52; výsledky najdete na str. 108, 109 ve tvaru vektoru, jeho jednotlivé složky jsou parciální derivace.

A na závěr definice:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}
\end{aligned}$$

2. Parciální funkce.
Příklad: zvolíme-li ve funkci $f : (x,y) \mapsto \sin(xy)$ pevnou hodnotu y, například $y = 2$, dostaneme funkci $g : x \mapsto \sin(2x)$, kterou budeme nazývat *parciální funkcí funkce* f.
Na obrázku vlevo je graf funkce f pro $x \in [-3,3]$, $y \in [-3,3]$. Na prostředním obrázku je řez grafu funkce f rovinou o rovnici $y = 2$. Na obrázku vpravo je řez posunut na čelní stěnu. Tento řez je grafem parciální funkce g.

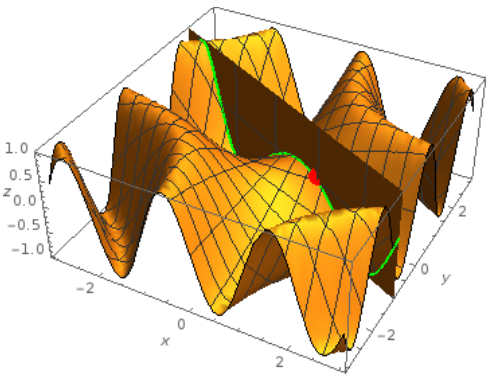


3. Geometrický význam parciální derivace. V minulém odstavci jsme vysvětlili, co je to parciální funkce a jak souvisí graf parciální funkce s grafem původní funkce. Parciální derivace podle x má stejný význam jako derivace funkce jedné proměnné – je to směrnice tečny grafu parciální funkce. A obdobně pro parciální derivaci podle dalších proměnných.

4. Parametrické rovnice přímky.
Parametrické rovnice přímky procházející bodem $\mathbf{a} = (1, 0)$ a mající směrový vektor $\mathbf{v} = (2, -1)$ jsou: $x = 1 + 2t$, $y = -t$.

Vysvětlete, jak souvisí parametrické rovnice přímky s operacemi násobení vektoru číslem a sčítání vektorů.
Návod: načrtněte geometrické vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ a k nim vektory $\mathbf{a} + 1/2\,\mathbf{v}$, $\mathbf{a} + \mathbf{v}$, $\mathbf{a} - \mathbf{v}$ a $\mathbf{a} + t\,\mathbf{v}$ pro další hodnoty t.

5. Zúžení funkce na přímku.



Na obrázku je

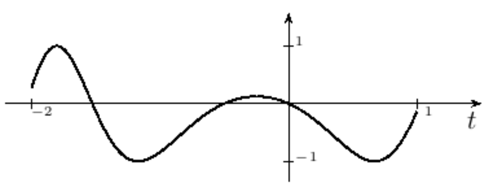
1. graf funkce $f : (x, y) \mapsto \sin(xy)$,
2. rovina kolmá k souřadné rovině xy protínající ji v přímce určené bodem $\mathbf{a} = (1, 0)$ a směrovým vektorem $\mathbf{v} = (2, -1)$.
3. zeleně jejich řez, což je křivka zadaná parametricky

   $x = 1+2t, \quad y = -t, \quad z = \sin((1+2t)(-t))$

   a červeně bod $(1, 0, f(1, 0))$.

Řez je grafem funkce

$$g : t \mapsto f(1 + 2t, -t) = \sin((1 + 2t)(-t))$$



a vidíte jej na obrázku vlevo. Hodnota parametru $t = 0$ odpovídá bodu $\mathbf{a}$, hodnota $t = 1$ bodu $\mathbf{a} + \mathbf{v}$. Vzdálenost těchto dvou bodů na „trojrozměrném“ grafu funkce f je $\|\,\mathbf{v}\,\| = \sqrt{5}$. Tomu jsme přizpůsobili odlišné měřítko na osách (odpovídá volbě stejného měřítka na osách „trojrozměrného“ grafu funkce f).

6. Derivace funkce podle vektoru. *Derivací funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ podle vektoru $\mathbf{v}$ nazýváme limitu, kterou budeme značit $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$*

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}. \tag{1}$$

Výpočet vysvětlíme na příkladu z odstavce 5:

$$f(x, y) = \sin(xy), \quad \mathbf{a} = (1, 0), \quad \mathbf{v} = (2, -1).$$

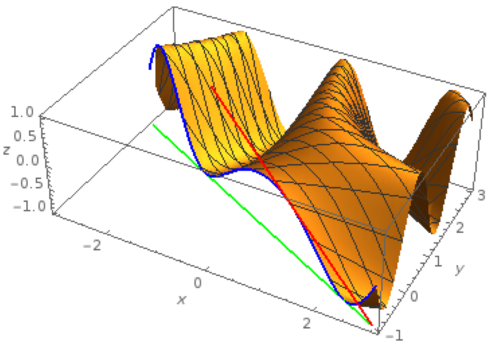
Dosadíme do (1)

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v}) &= f(1 + 2t, -t) = \sin((1 + 2t)(-t)) = -\sin(t + 2t^2) \\
f(\mathbf{a}) &= f(1, 0) = 0 \\
D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) &= \lim_{t \to 0} \frac{-\sin(t + 2t^2) - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t + 2t^2)}{t + 2t^2} \cdot \frac{-(t + 2t^2)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t + 2t^2)}{t + 2t^2} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{-(t + 2t^2)}{t} = -1
\end{aligned}$$

Všimněte si, že pomocí funkce $g : t \mapsto f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v})$ lze (1) zapsat

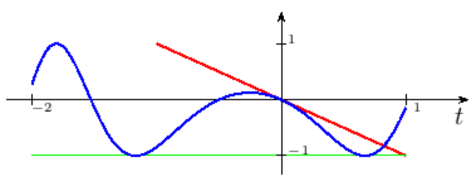
$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

7. Geometrický význam derivace funkce podle vektoru. Vysvětlíme na funkci f z odstavce 5.



Na obrázku je

1. graf funkce f,
2. zeleně přímka určená bodem $\mathbf{a} = (1, 0)$ a směrovým vektorem $\mathbf{v} = (2, -1)$ umístěná do podstavy kvádru,
3. modře graf funkce $g : t \mapsto f(1 + 2t, -t)$,
4. červeně tečna k tomuto grafu v bodě $(1, 0, f(1, 0))$.



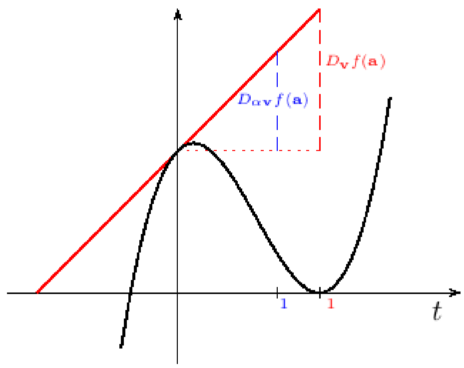
Na dalším obrázku je zobrazen řez s grafem funkce g a oběma přímkami.
Derivace v bodě $\mathbf{a}$ *podle vektoru* $\mathbf{v}$ je rovna velikosti lineární části přírůstku funkce g na jednotkový přírůstek proměnné t: $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \frac{\mathrm{d}g}{\Delta t}$.
Přírůstek funkce jedné proměnné a jeho lineární část jsou zopakované v odstavci 14.

8. Derivace funkce podle vektoru je homogenní funkcí vektoru.
Příklad: $f(x, y) = x^3 - xy$, $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 2)$. Dosadíme do (1)

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v}) &= f(-1 + t, 2 + 2t) = (-1 + t)^3 - (-1 + t)(2 + 2t) \\
f(\mathbf{a}) &= f(-1, 2) = 1 \\
D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) &= \lim_{t \to 0} \frac{(-1 + t)^3 - (-1 + t)(2 + 2t) - 1}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{-1 + 3t - 3t^2 + t^3 - (-2 + 2t^2) - 1}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{3t - 5t^2 + t^3}{t} = \lim_{t \to 0} (3 - 5t + t^2) = 3.
\end{aligned}$$

Co se stane, když vektor změníme na jeho násobek $\alpha\mathbf{v}$?. Počítejme

$$\begin{aligned}
D_{\alpha\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) &= \lim_{t \to 0} \frac{(-1 + \alpha t)^3 - (-1 + \alpha t)(2 + 2\alpha t) - 1}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{-1 + 3\alpha t - 3(\alpha t)^2 + (\alpha t)^3 - (-2 + 2(\alpha t)^2) - 1}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{3\alpha t - 5(\alpha t)^2 + (\alpha t)^3}{t} = \lim_{t \to 0} (3\alpha - 5\alpha^2 t + \alpha^3 t^2) = 3\alpha.
\end{aligned}$$



Vztah, který jsme odvodili

$$D_{\alpha\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \alpha D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \tag{2}$$

platí obecně, jakmile limita napravo existuje. Ilustrujeme ho na obrázku s grafem funkce

$$g : t \mapsto f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v})$$

Červeně je na ose t zobrazena jednotka pro vektor $\mathbf{v}$ a modře pro vektor $\alpha\,\mathbf{v}$ (pro hodnotu $\alpha = 0.7$). V předchozím odstavci jsme odvodili vztah $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \frac{\mathrm{d}g}{\Delta t}$, který můžeme interpretovat: $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \mathrm{d}g$ pro $\Delta t = 1$. Na obrázku jsou tyto přírůstky vyznačeny čárkovaně. Vztah (2) plyne z podobnosti trojúhelníků.

9. Co je to směr vektoru? Geometrický vektor je zadán svojí velikostí, směrem a orientací. Vysvětlete význam slova směr v tomto kontextu. Čím se liší od významu slova směr používaném v běžné řeči?

10. Derivace ve směru (směrová derivace) – terminologický zmatek. Derivace funkce více proměnných v bodě $\mathbf{a}$ ve směru vektoru $\mathbf{v}$ se v literatuře někdy definuje tak, jak jsme definovali derivaci podle vektoru $\mathbf{v}$. Vztah (2) ale mimo jiné říká, že hodnota derivace podle vektoru závisí na jeho velikosti. Proto se někdy derivace ve směru definuje pro jednotkový vektor (tj. vektor o velikosti jedna). I tady zůstává nejednoznačnost. K nenulovému vektoru $\mathbf{v}$ jsou dva jednotkové vektory stejného směru, a to $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ a $-\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ a derivace podle nich se tedy liší, je-li nenulová, znaménkem.

11. Gradient. Má-li funkce dvou proměnných $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ derivace prvního řádu podle obou proměnných $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, pak vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ nazýváme gradientem funkce f a značíme ho $\operatorname{grad} f$, případně ∇f.
Příklad: pro $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - x \sin y}$ je

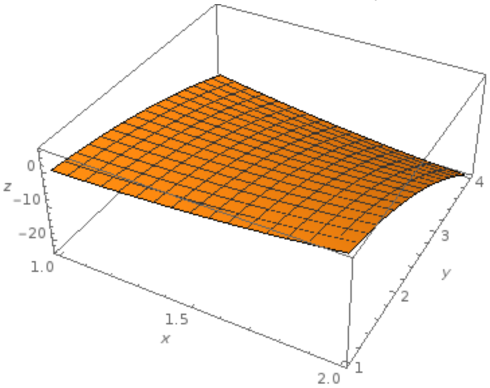
$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{2x - \sin y}{2\sqrt{x^2 - x\sin y}}, \frac{-x \cos y}{2\sqrt{x^2 - x\sin y}} \right).$$

Gradient funkce f v bodě $\mathbf{a}$ značíme $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$. Ve výše uvedeném případě je pro $\mathbf{a} = (2, \pi/6)$

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \left(\frac{7}{4\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \right).$$

12. Gradient jako funkce z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^d$.
TODO: Grafické vyznačení gradientu.

13. Rovnice tečné roviny a derivace (totální diferenciál).



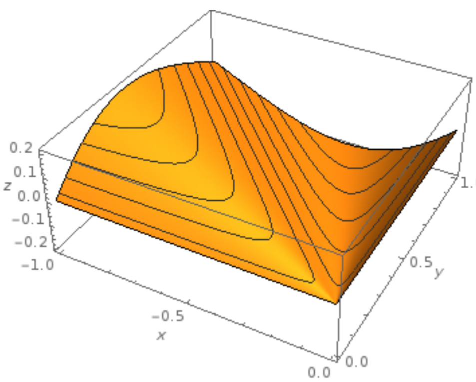
Na obrázku je graf funkce $f : (x, y) \mapsto x^3 - xy^2$ na $(x, y) \in [1, 2] \times [1, 4]$. Na přední stěně vidíte graf parciální funkce pro $y = 1$ a na pravé boční stěně graf parciální funkce pro $x = 2$. Z grafů vidíme, že v bodě $\mathbf{a} = (2, 1)$ je parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$ kladná a její hodnota je v řádu jednotek, parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})$ je záporná a její absolutní hodnota je také v řádu jednotek. Výpočtem dostaneme $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) = 11$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) = -4$.

Odvodíme rovnici tečné roviny. Nejdříve napíšeme tečné vektory v bodě $(2, 1, f(2, 1)) = (2, 1, 6)$ ke křivkám na přední a pravé stěně: $(1, 0, 11)$, $(0, 1, -4)$. Oba tyto vektory leží v tečné rovině, normálový vektor této tečné roviny je na oba kolmý: $\mathbf{n} = (11, -4, -1)$.

Rovnice roviny s normálovým vektorem $\mathbf{n} = (11, -4, -1)$ procházející bodem $\mathbf{b} = (2, 1, 6)$ je $11(x - 2) - 4(y - 1) - (z - 6) = 0$.

V obecném případě zapíšeme rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $\mathbf{a}$ pomocí skalárního součinu vektorů $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$ a $\mathbf{x} - \mathbf{a}$, kde $\mathbf{x} = (x, y)$

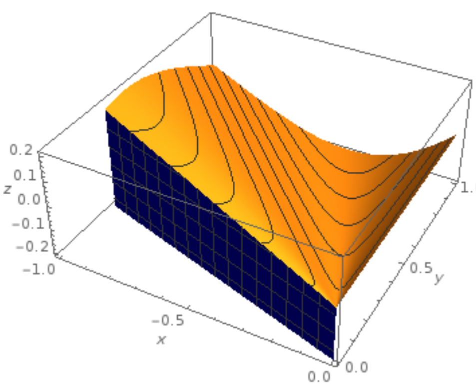
$$z = f(\mathbf{a}) + (\operatorname{grad} f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a}). \tag{3}$$



Na obrázku je graf funkce

$$f : (x, y) \mapsto xy(x + y)/(x^2 + y^2).$$

Obě parciální funkce v bodě $\mathbf{a} = (0, 0)$ jsou nulové, tedy i obě parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{a}$ jsou nulové. Dosazením do vzorce (3) dostaneme $z = 0$.



Nazvali bychom rovinu o rovnici $z = 0$ tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě $(0, 0, 0)$?
Na obrázku je řez grafu rovinou o rovnici $y = -0.3x$. Řezem je přímka

$$z = f(x, -0.3x) = -21/109x,$$

zatímco řezem „tečné“ roviny je přímka $z = 0$.
To nás vede k následující definici. Označíme v ní $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, $L(\mathbf{h}) = L_1h_1 + L_2h_2$, $\mathbf{o} = (0, 0)$.

Lineární funkci $L : (h_1, h_2) \mapsto L_1h_1 + L_2h_2$ nazveme *derivací funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *v bodě* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, pokud platí

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{o}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})}{\|\,\mathbf{h}\,\|} = 0. \tag{4}$$

V mnohé literatuře se místo termínu derivace používá *totální diferenciál*.

Rozdíl $f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})$ nazýváme *přírůstkem funkce* f v bodě $\mathbf{a}$. Hodnotu $L(\mathbf{h})$ nazýváme *lineární částí přírůstku funkce* f v bodě $\mathbf{a}$. Vektor $\mathbf{h}$ nazýváme přírůstkem argumentu funkce f. Vztah (4) znamená, že chyba, které se dopustíme záměnou přírůstku za jeho lineární část je „zanedbatelná“ ve srovnání s přírůstkem argumentu.

Derivaci funkce f v bodě $\mathbf{a}$ budeme značit $Df(\mathbf{a})$.

Platí: má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{a}$ derivaci, pak má v tomto bodě i

1. obě parciální derivace prvního řádu $f'_x(\mathbf{a})$, $f'_y(\mathbf{a})$ a derivace je rovna

$$Df(\mathbf{a}) : \mathbf{v} = (v_1, v_2) \mapsto f'_x(\mathbf{a})v_1 + f'_y(\mathbf{a})v_2$$

2. pro každý vektor $\mathbf{v}$ derivaci podle $\mathbf{v}$

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = f'_x(\mathbf{a})v_1 + f'_y(\mathbf{a})v_2$$

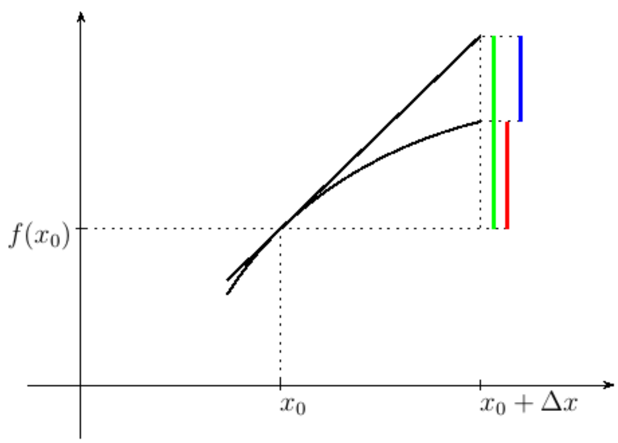
Dále platí (u zkoušky se budu ptát na důkaz tohoto tvrzení, dělali jsme ho na přednášce): jsou-li parciální derivace f'_x, f'_y funkce f v bodě $\mathbf{a}$ spojité, pak má funkce f v bodě $\mathbf{a}$ derivaci.

Všechny elementární funkce jsou na svých definičních oborech spojité. Derivace elementárních funkcí jsou opět elementární funkce a tedy jsou také na svých definičních oborech spojité.

Derivaci Df a derivaci podle vektoru $D_{\mathbf{v}}f$ tedy můžeme pro elementární funkce spočítat tak, že spočteme parciální derivace a dosadíme do výše uvedených vztahů.

Výše zmiňovaná funkce $f : (x, y) \mapsto xy(x + y)/(x^2 + y^2)$ není definovaná v bodě $\mathbf{a} = (0, 0)$, lze ji do bodu $\mathbf{a}$ spojitě rozšířit. Výše jsme ukázali, že toto spojité rozšíření má v bodě $\mathbf{a}$ parciální derivace, ale nemá v bodě $\mathbf{a}$ derivaci.

14. Funkce jedné proměnné, přírůstek funkce, derivace a aproximace lineární funkcí.



Na obrázku je červeně vyznačen *přírůstek funkce* $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,

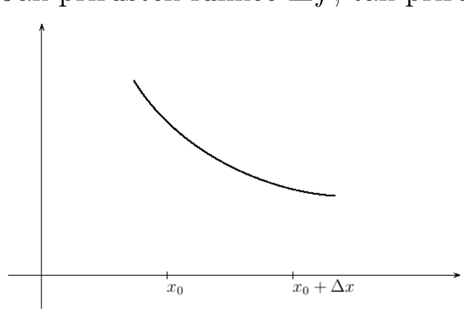
zeleně jeho *lineární část* $f'(x_0)\Delta x$, budeme ji značit $\mathrm{d}f$,

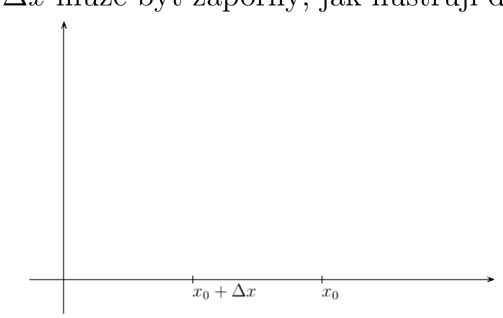
modře jejich rozdíl $\mathrm{d}f - \Delta f$.

Přírůstek proměnné x jsme označili Δx.

Místo Δx mnohdy píšeme $\mathrm{d}x$ (jsou to přírůstky identity $\mathrm{id} : x \mapsto x$).

Jak přírůstek funkce Δf, tak přírůstek Δx může být záporný, jak ilustrují další obrázky.





Připomeňte si příklad 5.2.10 a poznámku 5.2.11 v [2]. Kromě dalšího říká

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\Delta x} = 0,$$

což interpretujeme: pro malý přírůstek proměnné Δx je chyba, které se dopustíme záměnou přírůstku funkce Δf za linearizovaný přírůstek $\mathrm{d}f$, zanedbatelná vzhledem k Δx.

Poznámka ke geometrickému významu derivace: číslo $f'(x_0)$ je rovno podílu $\frac{\mathrm{d}f}{\Delta x}$ a má význam hodnoty linearizovaného přírůstku na jednotkový přírůstek proměnné x: pro $\Delta x = 1$ je $f'(x_0) = \mathrm{d}f$. Přímku o rovnici $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ nazýváme tečnou ke grafu funkce f, její směrnice je rovna $f'(x_0)$ a v případě stejných měřítek na osách x, y je směrnice rovna tangensu úhlu, který tečna svírá s kladnou poloosou x.

15. Úkoly.

1. Vysvětlete, jak souvisí parametrické rovnice přímky s operacemi násobení vektoru číslem a sčítání vektorů.

2. Nakreslete definiční obor a izokřivky funkce $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - x + y^2}$. Nevíte-li si rady s obecnou izokřivkou, pracujte nejdříve s izokřivkami o rovnicích $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 1$ a teprve potom přejděte k obecnému případu $f(x, y) = c$.

   Vypočtěte parciální derivace a gradient funkce f v bodě $\mathbf{a} = (1, 2)$.

   Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $\mathbf{a}$ podle vektoru $\mathbf{v} = (2, -1)$

   (a) přímo z definice

   (b) použitím gradientu

   Pomocí výše vypočtené derivace podle vektoru vypočtěte přibližně hodnotu funkce f v bodě $(1.2, 1.9)$. Porovnejte ji s přesnou hodnotou.

Reference

[1] `https://www.wolframalpha.com`.

[2] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf`.

[3] Ilja Černý. Inteligentní kalkulus 2.
`https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/IK2.pdf`.