Derivace funkce více proměnných

stručný přehled přednášky pro dálkaře

Martina Šimůnková

3. října 2017

1 Přehled

Uděláme stručný přehled pro případ funkce dvou proměnných x, y:

1. Ve výrazu $f(x, y)$ považujeme za proměnnou jen x. Proměnnou y považujeme za konstantu. Zderivujeme podle x a dostaneme *parciální derivaci* podle proměnné x. Obdobně dostaneme parciální derivaci podle y.
   Značení: $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x; $\frac{\partial f}{\partial y}$, f'_y.
   Geometrický význam: $y = konstanta$ je rovnice roviny kolmé na osu y. Zafixováním proměnné y tedy z funkce dvou proměnných, jejímž grafem je plocha dostaneme funkci jedné proměnné, jejímž grafem je průnik této plochy s rovinou $y = konstanta$. Parciální derivace podle x má stejný význam jako derivace funkce jedné proměnné – je to směrnice tečny ke grafu daným bodem.

2. Vektor, jehož složky jsou parciální derivace, nazýváme *gradient*, značíme $\operatorname{grad} f$, ∇f. Tedy $\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

3. Za x, y dosadíme do $f(x, y)$ z rovnice přímky $x = x_0 + ut$, $y = y_0 + vt$ a po dosazení zderivujeme podle proměnné t a dosadíme za t nulu. Dostaneme *derivaci podle vektoru* (u, v) *v bodě* (x_0, y_0).
   Parciální derivace podle x je speciálním případem derivace podle vektoru $(1, 0)$ a parciální derivace podle y je speciálním případem derivace podle vektoru $(0, 1)$.
   Značení: derivaci funkce f podle vektoru $\mathbf{v}$ značíme $D_{\mathbf{v}} f$, je-li navíc zadán bod $\mathbf{a}$, ve kterém derivaci počítáme, pak $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$.

4. Derivace podle vektoru se také někdy nazývá *derivací ve směru*. Někdy se tak nazývá jen pro vektory o jednotkové velikosti.

5. Derivace podle vektoru je homogenní funkcí vektoru $\mathbf{v}$: pro $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $D_{\alpha\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \alpha D_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$.
   Pokud je navíc funkcí aditivní, tedy pro $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ platí $D_{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}(\mathbf{a}) = D_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{a}) + D_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{a})$, pak zobrazení, které vektoru $\mathbf{v}$ přiřadí derivaci ve směru $D_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ nazýváme *slabou derivací funkce f v bodě* $\mathbf{a}$.
   Geometrický význam homogenity: tečna ve směru vektoru je nezávislá na velikosti vektoru.
   Geometrický význam aditivity: tečny v daném bodě a v různých směrech leží ve společné rovině.

6. Slabou derivaci funkce f v bodě $\mathbf{a}$ nazveme *silnou derivací funkce f v bodě* $\mathbf{a}$, pokud navíc platí

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{o}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - D_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{1}$$

   Pro funkci z $\mathbb{R}^{d_1}$ do $\mathbb{R}^{d_2}$ je *silná derivace v bodě* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{d_1}$ lineární zobrazení L splňující

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{o}} \frac{\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{2}$$

   Pro označení silné derivace budeme používat stejný symbol jako pro derivaci funkce jedné proměnné, tedy L označíme $f'(\mathbf{a})$. Pokud budeme mluvit o derivaci (bez přívlastku), budeme mít na mysli silnou derivaci.

7. Slabá i silná derivace se dá vyjádřit pomocí gradientu: $D_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = (\nabla f(a), \mathbf{v})$.
   Existence silné derivace souvisí s možností aproximace funkce f lineární funkcí $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{a}) + (\nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a})$.
   Rovinu o rovnici $\mathbf{y} = f(\mathbf{a}) + (\nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a})$ pak nazýváme tečnou rovinou.
   Srovnejte s jednorozměrným případem, kdy hodnotu $f(x)$ aproximujeme hodnotou $f(a) + f'(a)(x - a)$.

2 Derivace a spojitost

Platí: má-li funkce v zadaném bodě silnou derivaci, je v tomto bodě spojitá.

Spojitost obecně neplyne z jiného typu derivace, ani ze slabé derivace.

3 Výpočet derivací

Platí:

1. Má-li funkce v zadaném bodě silnou derivaci, má v něm i gradient a silnou derivaci lze vyjádřit pomocí gradientu.

2. Má-li funkce v zadaném bodě spojité parciální derivace prvního řádu, má v něm silnou derivaci (na hodině provedeme důkaz).

3. Nemá-li funkce v zadaném bodě spojité parciální derivace prvního řádu, nezbývá než derivace ve směru spočítat z její definice.
   Existenci slabé derivace zjistíme z definice.
   Pro výpočet silné derivace použijeme 1 a pak je třeba ověřit existenci silné derivace výpočtem limity.

4 Aproximační vlastnosti silné derivace

Přečtěte si v [JV] příklad 5.2.10 (str. 140), poznámku 5.2.11 (str. 141) a lemma 7.4.20 (str. 205). U funkce jedné proměnné plynou „dobré“ aproximační vlastnosti z existence derivace. U funkce více proměnných až z existence silné derivace (existence jiných derivací obecně nestačí).

Rovnice (1), (2) vyjadřují aproximační vlastnosti silné derivace: hodnota lineární funkce $L : \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ v bodě $\mathbf{x}$ se od funkční hodnoty $f(\mathbf{x})$ odlišuje „řádově méně“ než $\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|$.

5 Příklad

Vypočtěte (silnou) derivaci funkce $f : (\alpha, \beta) \mapsto (\sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\alpha)$.

Spočteme gradient jednotlivých složek. Vyjde $(\cos\alpha\cos\beta, -\sin\alpha\sin\beta)$, $(\cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha\cos\beta)$, $(-\sin\alpha, 0)$.

Funkce f je zobrazení $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$. Derivace $f'(a)$ v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ je také zobrazením $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$, které můžeme zapsat v maticovém tvaru $f'(\mathbf{a}) : \mathbf{v} \mapsto M\mathbf{v}$, kde vektor $\mathbf{v}$ zapíšeme do sloupce a matice M má v řádcích gradienty svých složek.

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

6 Úlohy.

1. Určete, které derivace má funkce f v bodě $a = (0, 0)$ a vypočtěte je.

$$f : (x, y) \mapsto \left(\frac{2xy^2}{x^2 + y^2}, \frac{3xy}{x^2 + y^2}, \cos(x - 2y)\right)$$

2. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $a = [1, 1]$. Jaké aproximační vlastnosti má lineární funkce l, jejímž grafem je tato tečná rovina? Napište Taylorův polynom funkce f v bodě a druhého stupně.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{x - 2y}$$