Skalární součin, norma vektoru, vzdálenost, limity v $\mathbb{R}^d$

stručný přehled přednášky pro dálkaře

Martina Šimůnková

11. října 2017

1 Skalární součin

Skalární součin vektorů $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k$$

Vlastnosti

1. Pozitivita: $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d)((\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0)$, přitom $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ právě když je $\mathbf{x}$ rovno nulovému vektoru, tedy $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.
2. Symetrie: $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d)((\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}))$.
3. Linearita (vzhledem ke druhému argumentu)
   $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^d)(\forall \alpha_1 \alpha_2 \in \mathbb{R})((\mathbf{x}, \alpha_1 \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \mathbf{y}_2) = \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2))$

Důkaz vlastností provedeme dosazením do definice.

Poznámky:
Z linearity vzhledem ke druhému argumentu a ze symetrie plyne linearita vzhledem k prvnímu argumentu:
$(\alpha_1 \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \mathbf{y}_2, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \alpha_1 \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \mathbf{y}_2) = \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) = \alpha_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}) + \alpha_2(\mathbf{y}_2, \mathbf{x})$.
Linearitu lze nahradit dvěmi jednoduššími vlastnostmi – aditivitou:
$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^d)((\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2))$
a homogenitou:
$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d)(\forall \alpha \in \mathbb{R})((\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$.

2 Norma vektoru

Norma vektoru (jiný název pro velikost vektoru) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2}.$$

Je dobré si uvědomit, že naše definice velikosti vektoru je v podstatě Pythagorova věta.

Vlastnosti normy vektoru

1. Pozitivita: $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d)(\|\mathbf{x}\| \geq 0$, přitom $\|\mathbf{x}\| = 0$ právě když je $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.
2. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|)$
3. subaditivita (trojúhelníková nerovnost)
   $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d)(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$.

Důkaz: 1, 2 je vidět po dosazení, důkaz 3 uvedeme níže (použijeme k němu Cauchy-Schwartzovu nerovnost).

Další vlastnosti

1. Z 2 plyne $(\forall x \in \mathbb{R}^d)(\|-x\| = \|x\|)$. Použijeme 2 s $\alpha = -1$.
2. Z 2 plyne, že norma nulového vektoru je nula. Použijeme 2 s $\alpha = 0$.

Cauchy-Schwartzova nerovnost

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d)(|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|),$$

přitom rovnost platí v Cauchy-Schwartzově nerovnosti jen pro kolineární vektory (jeden je násobkem druhého).

Poznámka: skalární součin geometrických vektorů se spočte jako součin velikostí vektorů a kosinu úhlu který svírají. Cauchy-Schwartzova nerovnost v tomto případě říká, že kosinus je v absolutní hodnotě menší nebo roven jedné.

Uvedeme dva důkazy Cauchy-Schwartzovy nerovnosti. V obou případech budeme pracovat se skalárním součinem lineární kombinace ve tvaru

$$(\mathbf{x} - t\mathbf{y}, \mathbf{x} - t\mathbf{y}) \text{ případně } (\|\mathbf{x}\|\mathbf{y} - \|\mathbf{y}\|\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|\mathbf{y} - \|\mathbf{y}\|\mathbf{x}).$$

V [3] lze nalézt první z důkazů rozepsaný po souřadnicích.
Výraz $(\mathbf{x} - t\mathbf{y}, \mathbf{x} - t\mathbf{y})$, o kterém víme, že pro libovolné reálné t nabývá

nezáporné hodnoty, upravíme pomocí linearity na $(\mathbf{x},\mathbf{x})-2t\,(\mathbf{x},\mathbf{y})+t^2\,(\mathbf{y},\mathbf{y})$. V proměnné t se jedná o kvadratický výraz s diskriminantem $D=4\,(\mathbf{x},\mathbf{y})^2-4\,(\mathbf{x},\mathbf{x})\,(\mathbf{y},\mathbf{y})$. Z (výše zmiňované) nezápornosti výrazu plyne, že diskriminant D nemůže být kladný. Proto platí

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x},\mathbf{x})\,(\mathbf{y},\mathbf{y})\,,$$

což odmocněním upravíme na

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

Druhý důkaz: výraz $(\|\mathbf{x}\|\mathbf{y}-\|\mathbf{y}\|\mathbf{x},\|\mathbf{x}\|\mathbf{y}-\|\mathbf{y}\|\mathbf{x})$, o kterém víme, že je nezáporný, upravíme pomocí linearity na $\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\,(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Z nezápornosti dostaneme po úpravě vytknutím nerovnici

$$\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\,[\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|-(\mathbf{x},\mathbf{y})] \geq 0,$$

Odkud pro nenulové vektory dostáváme (nerovnici lze v tom případě pokrátit)

$$\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|-(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$$

a po úpravě

$$\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \geq (\mathbf{x},\mathbf{y})\,. \tag{1}$$

Zbývá vysvětlit, že nerovnost platí i s absolutní hodnotou na pravé straně a že platí i v případě, že je některý z vektorů nulový (v tomto případě nelze výše krátit nerovnici).

Absolutní hodnota: v případě záporné pravé strany v (1) stačí u jednoho z vektorů změnit znaménko, tedy místo vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ uvažovat vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}=-\mathbf{y}$. Nerovnost (1) pro vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$

$$\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{z}\| \geq (\mathbf{x},\mathbf{z})$$

dá po dosazení a použití $\|\mathbf{z}\|=\|-\mathbf{y}\|=\|\mathbf{y}\|$, $(\mathbf{x},\mathbf{z})=(\mathbf{x},-\mathbf{y})=-(\mathbf{x},\mathbf{y})$

$$\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \geq -\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\,.$$

Vzhledem k zápornosti $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ je pravá strana rovna $|(\mathbf{x},\mathbf{y})|$.

Nulový vektor: v případě $\mathbf{x}=\mathbf{o}$ nebo $\mathbf{y}=\mathbf{o}$ jsou obě strany v Cauchy-Schwartzově nerovnosti nulové, tedy nerovnost platí.

Důkaz trojúhelníkové nerovnosti: Nerovnost $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ umocníme (je potřeba si uvědomit, že umocňování je ekvivalentní úprava) a levou stranu vyjádříme pomocí skalárního součinu

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2\,.$$

Levou stranu upravíme pomocí linearity a symetrie a použijeme $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$

$$L = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Použitím Cauchy-Schwartzovy nerovnosti dostaneme

$$L \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2,$$

což je rovno pravé straně

$$P = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

3 Vzdálenost (metrika) v $\mathbb{R}^d$

Poznámka: v předchozích odstavcích jsme mluvili o vektorech v $\mathbb{R}^d$. V tomto budeme mluvit o bodech v $\mathbb{R}^d$ a budeme je značit stejně. Bod můžeme vnímat jako jeho polohový vektor a naopak vektor můžeme vnímat jako jeho koncový bod po umístění počátečního bodu do počátku.

Vzdálenost bodů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ (Jak geometricky znázorníte rozdíl vektorů? Nakreslete si obrázek):

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Vlastnosti:

1. Pozitivita: $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d)(\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0)$, přitom $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ právě když je $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

2. Symetrie: $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d)(\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varrho(\mathbf{y}, \mathbf{x}))$.

3. Trojúhelníková nerovnost: $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d)(\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varrho(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq (\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{z}))$.

Důkaz: uvedené vlastnosti jsou přímým důsledkem vlastností normy. Podrobnosti na hodině.

4 Okolí bodu v $\mathbb{R}^d$

Okolí bodu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ je koule bez hraniční sféry. Značíme buď $\mathcal{U}$ (z německého umgebung) nebo $\mathcal{B}$ (z anglického ball).

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}, r) = \mathcal{B}(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}.$$

5 Limita posloupnosti v $\mathbb{R}^d$

Řekneme, že posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^d$ bodů z $\mathbb{R}^d$ má limitu rovnu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n)(\forall k \in \mathbb{N})(k > n \Rightarrow \varrho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) < \varepsilon).$$

Poznámka: pro $d = 1$ je $\varrho(x, y) = |x - y|$ a limita posloupnosti je totožná s tou, kterou znáte z AN1E.
Poznámka: pomocí okolí lze definici zapsat (ve stejném tvaru jako v AN1E)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n)(\forall k \in \mathbb{N})(k > n \Rightarrow \mathbf{x}_k \in \mathcal{B}(\mathbf{x}, \varepsilon)).$$

Poznámka: v $\mathbb{R}^d$ uvažujeme jen vlastní (tedy konečné) limity.

Lemma. *Pro $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ a $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ platí*

$$|x_i| \leq \|\mathbf{x}\| \leq |x_1| + \cdots + |x_d|.$$

Důkaz. Levá nerovnost plyne z $x_k^2 \leq x_1^1 + \cdots + x_d^2$. Druhá nerovnost plyne z použití trojúhelníkové nerovnosti na vektory $(x_1, 0)(0, x_2)$ v $\mathbb{R}^2$ a z (opakovaného) použití na vektory $(x_1, 0, 0)(0, x_2, 0)(0, 0, x_3)$ v $\mathbb{R}^3$. $\square$

Nakreslete obrázek pro $d = 2$: zvolte vektor $\mathbf{x}$ v obecné poloze a zakreslete úsečky o velikostech $|x_1|$, $\|\mathbf{x}\|$, $|x_1| + |x_2|$. Jak se situace změní pro $d = 3$?

Nerovnosti v lemmatu můžeme vyložit: má-li vektor malou normu, má složky blízké nule; má-li vektor složky blízké nule, má malou normu. Dosadíme-li do nerovností za $\mathbf{x}$ rozdíl $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ a uvážíme-li, že $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ je rovno vzdálenosti bodů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, vyložíme nerovnost: mají-li body $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ malou vzdálenost, liší se jejich složky málo; liší-li se složky bodů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ málo, mají malou vzdálenost.

Věta. *Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^d$ bodů z $\mathbb{R}^d$ má limitu rovnu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ právě když pro všechny indexy $i \in \{1, \ldots, d\}$ platí: limita i-té složky bodu $\mathbf{x}_k$ je rovna i-té složce bodu $\mathbf{x}$.*

Příklad. Limita posloupnosti

$$\mathbf{x}_k = \left(\frac{k}{2k+1}, \frac{\sin k}{k}, \operatorname{arctg} \mathrm{k} \right)$$

je rovna $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Hlavní myšlenka důkazu věty: vzdálenost $\varrho(\mathbf{x}_k, \mathbf{x})$ zapíšeme jako $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|$ a použijeme předchozí lemma.

6 Limita funkce

Řekneme, že funkce f z $\mathbb{R}^{d_1}$ do $\mathbb{R}^{d_2}$ má pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d_1}$ jdoucí k $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{d_1}$ limitu rovnu $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^{d_2}$, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d_1})(\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow \varrho(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}_0) < \varepsilon).$$

Pomocí okolí definici zapíšeme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d_1})(\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varepsilon)).$$

Podobně jako pro posloupnosti se dá ukázat, že limitu funkce počítáme po složkách, stačí tedy probrat jen případ $d_2 = 1$ tedy funkci z $\mathbb{R}^{d_1}$ do $\mathbb{R}$. To budeme nadále dělat a limitu označíme y_0 místo $\mathbf{y}_0$.

Proložíme-li limitním bodem $\mathbf{x}_0$ přímku se směrovým vektorem $\mathbf{v}$ o rovnici $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$, dostaneme z věty o limitě složené funkce implikaci

$$\text{jestliže} \quad f(\mathbf{x}) \to y_0 \text{ pro } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0, \quad \text{pak} \quad f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) \to y_0 \text{ pro } t \to 0.$$

Příklad. Chceme zjistit, jestli má funkce $f : (x, y) \mapsto \frac{xy - 3x^2}{x^2 + y^2}$ limitu v bodě $(0, 0)$. Spočítáme limity po přímkách:
Po ose x, která má rovnici $y = 0$, po dosazení vyjde $f(x, 0) = -3$ a jsou tedy dvě možnosti, buď funkce f v bodě $(0, 0)$ nemá limitu nebo ji má rovnu -3. Po ose y, která má rovnici $x = 0$, po dosazení vyjde $f(0, x) = 0$. Odtud učiníme závěr, že limita neexistuje (musela by být rovna jak -3, tak 0; zároveň ale víme, že funkce má nejvýše jednu limitu).

Příklad. Chceme zjistit, jestli má funkce $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ limitu v bodě $(0, 0)$. Spočítáme limity po přímkách:
Po ose x, která má rovnici $y = 0$, po dosazení vyjde $f(x, 0) = 0$ a jsou tedy dvě možnosti, buď funkce f v bodě $(0, 0)$ nemá limitu nebo ji má rovnu nule. Po ose y, která má rovnici $x = 0$, po dosazení vyjde $f(0, x) = 0$, odtud plyne stále stejný závěr – nevíme, zda limita existuje.
Po přímce $y = x$, po dosazení vyjde $f(x, y) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Odtud učiníme závěr, že limita neexistuje (musela by být rovna jak nule tak jedné polovině; zároveň ale víme, že funkce má nejvýše jednu limitu).

Příklad. Chceme zjistit, zda má funkce $f : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ limitu v bodě $(0, 0)$. Spočítáme limity po osách: $f(x, 0) = 0$, $f(0, y) = 0$, limity vyjdou nula. Dále spočítáme limity po ostatních přímkách procházejících počátkem, ty mají rovnici $y = kx$ s $k \neq 0$: $f(x, kx) = \frac{k^2 x}{1 + k^2} \to 0$ pro $x \to 0$. Stále máme nulu jako kandidáta na hodnotu limity, ale nevíme, jestli limita existuje. Její existenci ukážeme úpravou na součin $f(x, y) = x \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ výrazu x, který má limitu rovnu nule a výrazu $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$, který je omezený (nabývá hodnot mezi nulou a jedničkou). Odtud a z věty o sevřené funkci dostaneme existenci limity.

Příklad. Chceme zjistit, zda má funkce $f : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ limitu v bodě $(0, 0)$. Limity po všech přímkách vyjdou opět nula. Limita po parabole $x = y^2$ vyjde $f(y^2, y) = \frac{1}{2}$ jedna polovina. Pokud by limita funkce f existovala, musela by být stejná po přímkách i po parabole. Odtud uděláme závěr, že limita neexistuje.

Další příklady naleznete v [1], článek 12.6 a v [2] na straně 91, č. 14.16 až 14. 19. U příkladu 14.18 počítejte limitu převrácené hodnoty.

Reference

[1] Jiří Veselý. Metrické prostory, kapitola 12.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma13-14/MFF/MMA/kapi12.pdf`.

[2] Ilja Černý. Inteligentní kalkulus 2.
`https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/IK2.pdf`.

[3] M. Š. Vektorové prostory se skalárním součinem.
na `https://kap.fp.tul.cz/~simunkova`, text z roku 2005 původně určený studentům fakulty strojní.