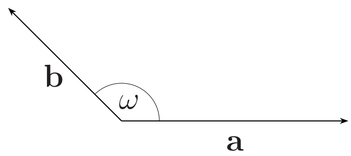
Vektorové prostory se skalárním součinem

2. prosince 2005

1 Skalární součin geometrických vektorů

Skalární součin geometrických vektorů je definován jako součin jejich velikostí násobený kosinem jejich odchylky.

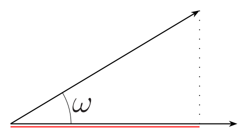
Označíme-li skalární součin vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ symbolem $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, velikosti symboly $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, je



$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\omega \tag{1}$$

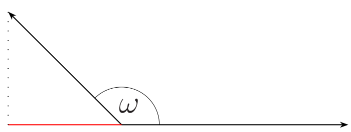
Všimněte si, že ze znaménka skalárního součinu dvou vektorů je možné zjistit následující informaci o jejich odchylce: kladný – nulový – záporný skalární součin znamená ostrý – pravý – tupý úhel (nakreslete si graf kosinu na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$).

Uvědomte si, že pro vektory svírající ostrý nebo pravý úhel je $\|\mathbf{b}\|\cos\omega$ velikostí kolmého průmětu vektoru $\mathbf{b}$ do směru vektoru $\mathbf{a}$. Označíme-li tuto velikost b_a, pak



$$\text{pro } \omega \le \pi/2 \quad \text{platí} \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = b_a\|\mathbf{a}\| \tag{2}$$

Pro tupý úhel ω lze výše uvedené snadno zobecnit. Stačí si uvědomit, že $\cos(\pi-\omega) = -\cos\omega$. Proto



$$\text{pro } \omega \in \langle \pi/2,\pi\rangle \quad \text{platí} \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -b_a\|\mathbf{a}\| \tag{3}$$

$$\text{a pro všechna } \omega \in \langle 0,\pi\rangle \quad \text{platí} \quad |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = b_a\|\mathbf{a}\| \tag{4}$$

Zavedeme-li kartézský souřadný systém, můžeme následovně vypočíst skalární součin $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ vektorů $\mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1,b_2,b_3)$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{5}$$

a následovně velikost vektoru $\mathbf{a}$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{6}$$

1.1 Vlastnosti skalárního součinu geometrických vektorů

Uvedeme několik vlastností, které mají oba výše uvedené skalární součiny i s dokázáním jejich platnosti.

1. Pro každý vektor $\mathbf{a}$ platí $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$
2. Pro každý vektor $\mathbf{a}$ platí $\|\mathbf{a}\| \geq 0$, přitom $\|\mathbf{a}\| = 0$ pouze pro nulový vektor.
3. Pro každé dva vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ platí $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$
4. Pro každé dva vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ platí $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$
5. Pro každý vektor $\mathbf{a}$ platí $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$, přitom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ pouze pro nulový vektor.
6. Pro každé dva vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ platí $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
7. Pro každé dva vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a pro každé číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
8. Pro každé tři vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ platí $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

Důkazy a komentáře – (a) pro geometrickou definici (1), (b) pro souřadnicovou definici (5).

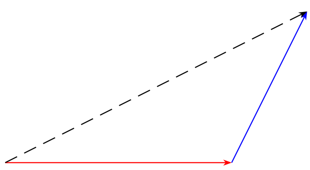
1. (a) Necháme čtenáři na rozmyšlenou. Uvědomte si, že vektor svírá sám se sebou nulový úhel a že $\cos 0 = 1$.

   (b) Dosaďte $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ do (5) a porovnejte s (6).

2. (b) Uvědomte si, že druhá mocnina reálného čísla nemůže být záporná a pro které číslo je nulová.

3. Nerovnost $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ nazýváme **trojúhelníkovou nerovností**.

   Proč, to by mělo být patrné z následujícího obrázku, na kterém jsou zobrazeny vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a jejich součet. Tvoří-li vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ spolu se svým součtem trojúhelník, je nerovnost ostrá. Rovnost nastane, mají-li vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ stejný směr a orientaci. Jak je to v případě, že mají stejný směr a opačnou orientaci?

   Trojúhelníková nerovnost pro (5) znamená

   $$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} \tag{7}$$

   Důkaz této nerovnosti pro libovolnou šestici čísel a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 provedeme v následující kapitole.

4. Pro (1) plyne z (4) a z oboru hodnot funkce kosinus. Důkaz pro (5) provedeme v následující kapitole.

5. Pro tento bod platí totéž jako pro bod 1.

6. Necháme čtenáři na rozmyšlenou.

7. (a) Vyplývá z toho, že kolmý průmět je homogenní zobrazení.
   (b) Pro součin (5) je

$$\mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = a_1(\alpha b_1) + a_2(\alpha b_2) + a_3(\alpha b_3)$$

   a

$$\alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \alpha(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

   Snad čtenář vidí, že se tyto výrazy rovnají.

8. (a) Vyplývá z (2), (3) a z toho, že kolmý průmět je aditivní zobrazení.
   (b) Podobně pro (5) je

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$$

   a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3$$

   a výrazy na pravých stranách se rovnají.

Platnost 7. a 8. pro skalární součin (1) plyne z toho, že kolmý průmět je lineární zobrazení.

1.2 Důkaz Cauchy - Schwarzovy a trojúhelníkové nerovnosti

Nerovnost

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$$

která pro skalární součin (5) má tvar

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

nazýváme **Cauchy - Schwarzovou nerovností**. Provedeme její důkaz. Jsou-li $a_1, \ldots, b_3$ pevně zvolená (ale libovolná) reálná čísla, je pro každé $t \in \mathbb{R}$ splněna nerovnost

$$(a_1 + t\, b_1)^2 + (a_2 + t\, b_2)^2 + (a_3 + t\, b_3)^2 \geq 0$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou nerovnici proměnné t

$$t^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2t(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 0$$

Jsou-li řešením kvadratické nerovnice všechna reálná čísla, nemůže mít příslušná kvadratická rovnice dva různé reálné kořeny (kreslete graf!), a proto pro její diskriminant platí

$$D \leq 0 \quad \text{tj.} \quad 4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 - 4(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \leq 0$$

Odtud

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

a proto

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

(Poslední úvaha je hodna rozmyšlení.)
Protože libovolné reálné číslo nemůže být větší než jeho absolutní hodnota, je

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq |a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|$$

a tedy i

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Vynásobením dvěma a přičtením stejného výrazu k oběma stranám nerovnice dostaneme

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2)+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \leq (a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2)+2\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Upravíme každou ze stran nerovnice

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 \leq \left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2$$

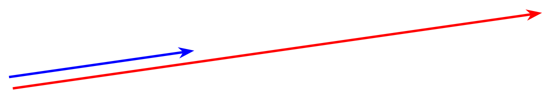
odtud (podle stejné úvahy výše označené k rozmyšlení)

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2} \leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

a to je trojúhelníková nerovnost.

1.3 Kolmé a jednotkové vektory, ortogonální a ortonormální baze

Na obrázku je znázorněn vektor $\mathbf{a}$ a vektor $\mathbf{a_0}$ stejného směru a orientace jako vektor $\mathbf{a}$ o velikosti rovné $\|\mathbf{a_0}\| = 1$.



Vektor $\mathbf{a_0}$ je s vektorem $\mathbf{a}$ svázán vztahem

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$$

Vektor, jehož velikost je rovna jedné, nazýváme **jednotkovým vektorem**.
Například vektory $\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ a $\mathbf{b}_0 = -\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ jsou jednotkové vektory. (Jednotkové vektory často označujeme dolním indexem 0.)

Bazi vektorového prostoru nazveme **ortogonální**, pokud jsou bazové vektory vzájemně kolmé. Například vektory

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 2), \quad \mathbf{a}_2 = (2, 2, -1), \quad \mathbf{a}_3 = (4, -5, -2)$$

tvoří ortogonální bazi. Pokud jsou vektory baze navíc jednotkové, nazýváme ji **ortonormální bazí**. Z ortogonální baze $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ snadno vyrobíme ortonormální bazi

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_1/\|\mathbf{a}_1\| = (1, 0, 2)/\sqrt{5} = (\sqrt{5}/5, 0, 2\sqrt{5}/5) \\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_2/\|\mathbf{a}_2\| = (2, 2, -1)/3 = (2/3, 2/3, -1/3) \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_3/\|\mathbf{a}_3\| = (4, -5, -2)/\sqrt{45} = (4\sqrt{5}/15, -\sqrt{5}/3, -2\sqrt{5}/15)
\end{aligned}$$

1.4 Dávají oba skalární součiny stejný výsledek?

V této kapitole ukážeme, že oba vzorce pro výpočet skalárního součinu - geometrický (1) a souřadnicový (5) dávají pro zadanou dvojici vektorů stejný výsledek. Dále ukážeme, že máme-li zadaný skalární součin pro bazové vektory a utvoříme z nich matici

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_n \end{pmatrix},$$

je možné spočítat skalární součin libovolné dvojice vektorů $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ pomocí jejich souřadnic ${}^{\mathcal{A}}\mathbf{b}$, ${}^{\mathcal{A}}\mathbf{c}$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \left({}^{\mathcal{A}}\mathbf{b}\right)^T \; G \; {}^{\mathcal{A}}\mathbf{c} \tag{8}$$

Vztah (8) odvodíme jako důsledek vlastností uvedených v kapitole 1.1, platí tedy pro oba skalární součiny. Zdůrazněme dále, že (8) mimo jiné znamená, že skalární součin na prostoru V coby zobrazení $V \times V$ do $\mathbb{R}$ je plně určen svými hodnotami pro bazové vektory. Ukážeme-li tedy, že oba skalární součiny (geometrický a souřadnicový) dávají pro vektory baze stejné výsledky, plyne odtud, že dávají stejné výsledky pro libovolnou dvojici vektorů.

Ukažme platnost (8) pro prostor dimenze 3. Je-li

$$\mathbf{b} = b^1\mathbf{a}_1 + b^2\mathbf{a}_2 + b^3\mathbf{a}_3 \quad \text{a} \quad \mathbf{c} = c^1\mathbf{a}_1 + c^2\mathbf{a}_2 + c^3\mathbf{a}_3$$

je

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= (b^1\mathbf{a}_1 + b^2\mathbf{a}_2 + b^3\mathbf{a}_3) \cdot (c^1\mathbf{a}_1 + c^2\mathbf{a}_2 + c^3\mathbf{a}_3) \\
&\quad \text{použijeme vlastnost 8 z kapitoly 1.1} \\
&= (b^1\mathbf{a}_1 + b^2\mathbf{a}_2 + b^3\mathbf{a}_3) \cdot (c^1\mathbf{a}_1) + (b^1\mathbf{a}_1 + b^2\mathbf{a}_2 + b^3\mathbf{a}_3) \cdot (c^2\mathbf{a}_2) + (b^1\mathbf{a}_1 + b^2\mathbf{a}_2 + b^3\mathbf{a}_3) \cdot (c^3\mathbf{a}_3) \\
&\quad \text{vlastnost 6 spolu s 8 umožňuje roznásobit i první vektor} \\
&= (b^1\mathbf{a}_1) \cdot (c^1\mathbf{a}_1) + (b^2\mathbf{a}_2) \cdot (c^1\mathbf{a}_1) + (b^3\mathbf{a}_3) \cdot (c^1\mathbf{a}_1) + (b^1\mathbf{a}_1) \cdot (c^2\mathbf{a}_2) + (b^2\mathbf{a}_2) \cdot (c^2\mathbf{a}_2) + \\
&\quad (b^3\mathbf{a}_3) \cdot (c^2\mathbf{a}_2) + (b^1\mathbf{a}_1) \cdot (c^3\mathbf{a}_3) + (b^2\mathbf{a}_2) \cdot (c^3\mathbf{a}_3) + (b^3\mathbf{a}_3) \cdot (c^3\mathbf{a}_3) \\
&\quad \text{vlastnost 7 umožňuje vytknout čísla } c^1,\ c^2,\ c^3,\ \text{7 spolu s 6 i } b^1,\ b^2,\ b^3 \\
&= b^1c^1(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1) + b^2c^1(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1) + b^3c^1(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1) + b^1c^2(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) + b^2c^2(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2) + \\
&\quad b^3c^2(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2) + b^1c^3(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3) + b^2c^3(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) + b^3c^3(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3)
\end{aligned}$$

Jako cvičení ponecháme čtenáři porovnání výše uvedeného s tím, co vyjde vynásobením matic ve vztahu (8)

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \left({}^{\mathcal{A}}\mathbf{b}\right)^T \; G \; {}^{\mathcal{A}}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$$

Zbývá ukázat, že geometricky a souřadnicově definované skalární součiny jsou identické pro (alespoň jednu) bazi prostoru. Připomeňme, že souřadnicový skalární součin jsme definovali pro kartézské souřadnice. Rozmyslete si, že takovým souřadnicím odpovídá ortonormální baze, tj. baze vektorů o velikosti 1 a navzájem kolmých. Na závěr si rozmyslete čemu je rovna matice G pro takovou bazi. Správnost svého výpočtu si můžete ověřit v závěru příští kapitoly.

2 Skalární součin na vektorovém prostoru

Zobrazení, které libovolné dvojici vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ z vektorového prostoru V přiřazuje reálné číslo (to budeme označovat $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$) a které má vlastnosti

1. Pro každý vektor $\mathbf{a} \in V$ je $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$, přitom $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ pouze pro nulový vektor $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ (positivita).
2. Pro každé dva vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ platí $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ (symetrie).
3. Pro každé tři vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ platí $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ (aditivita).
4. Pro každé dva vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a každé reálné číslo α platí $\langle \mathbf{a}, \alpha\mathbf{b} \rangle = \alpha\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ (homogenita).

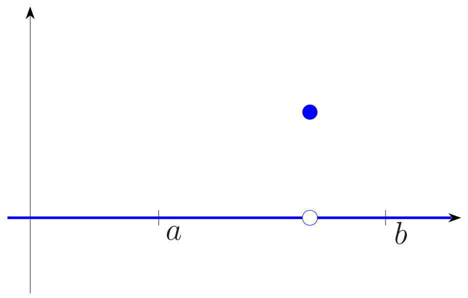
nazýváme skalárním součinem na vektorovém prostoru V.

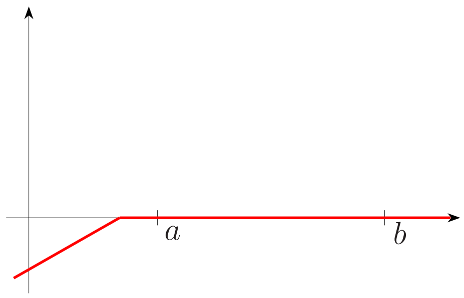
V dalším textu zavedeme skalární součin na prostoru polynomů

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(x)Q(x)\,dx \tag{9}$$

Přitom $a < b$ jsou pevně zvolená (tj. nezávislá na konkrétní volbě funkcí P, Q) reálná čísla. Ukážeme, že (9) splňuje 1 – 4.

1. $\langle P, P \rangle = \int_a^b (P(x))^2\,dx \geq 0$, plyne z vlastností integrálů (integrál nezáporné funkce je nezáporný).
   Zajímavější je otázka kladnosti integrálu $\int_a^b (f(x))^2\,dx$ pro nenulovou funkci f. Nenulová funkce f má nenulovou funkční hodnotu v alespoň jednom bodě svého definičního oboru. Na obrázcích vidíte grafy dvou nenulových funkcí, pro které je integrál $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$.

   Pro polynom však žádná z těchto dvou situací nemůže nastat. Modrá funkce je na rozdíl od polynomů nespojitá. Červená funkce má pro změnu kořeny (tj. body s nulovou funkční hodnotou) ve všech bodech intervalu $\langle a, b \rangle$, zatímco každý nenulový polynom má pouze konečně mnoho kořenů (připomeňme, že jejich počet je nejvýše roven stupni polynomu).

2. Platnost $\int_a^b P(x)Q(x)\,dx = \int_a^b Q(x)P(x)\,dx$ je zřejmá.

3. Plyne z aditivity integrálu vzhledem k integrované funkci $\int_a^b P(x)\left(Q_1(x)+Q_2(x)\right)\,dx = \int_a^b P(x)Q_1(x) + P(x)Q_2(x)\,dx = \int_a^b P(x)Q_1(x)\,dx + \int_a^b P(x)Q_2(x)\,dx$

4. Plyne z $\int_a^b P(x)\alpha Q(x)\,dx = \alpha \int_a^b P(x)Q(x)\,dx$

2.1 Metrika, kovariantní a kontravariantní souřadnice vektoru

Souřadnice vektoru, se kterými jsme až doposud pracovali, budeme nazývat **kontravariantními souřadnicemi** a budeme je označovat horním indexem, např. $\mathbf{v} = v^1\mathbf{a}_1 + v^2\mathbf{a}_2 + \cdots + v^n\mathbf{a}_n$. **Kovariantními souřadnicemi** vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bazi $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ budeme nazývat aritmetický vektor $_{\mathcal{A}}\mathbf{v} = (\langle\mathbf{v},\mathbf{a}_1\rangle, \langle\mathbf{v},\mathbf{a}_2\rangle, \ldots, \langle\mathbf{v},\mathbf{a}_n\rangle)^T$. Jeho složky budeme označovat dolním indexem $v_i = \langle\mathbf{v},\mathbf{a}_i\rangle$. V dalším ukážeme, že

1. Z kontravariantních souřadnic je možno vypočítat kovariantní pomocí vztahu

$$v_i = \langle\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_1\rangle v^1 + \langle\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_2\rangle v^2 + \cdots + \langle\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_n\rangle v^n \tag{10}$$

   Matice skalárních součinů vektorů baze

$$G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1\rangle & \langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_n\rangle \\ \langle\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1\rangle & \langle\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_1\rangle & \langle\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_n\rangle \end{pmatrix}$$

   se nazývá **metrický tenzor**. Vztah (10) mezi kontravariantními a kovariantními souřadnicemi vektoru pak můžeme zapsat maticově

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1\rangle & \langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_n\rangle \\ \langle\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1\rangle & \langle\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_1\rangle & \langle\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_2\rangle & \ldots & \langle\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

   nebo taky

$$_{\mathcal{A}}\mathbf{v} = G_{\mathcal{A}}\ {}^{\mathcal{A}}\mathbf{v} \tag{11}$$

2. Skalární součin dvou vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ můžeme vypočítat pomocí kontravariantních souřadnic a^i jednoho vektoru a kovariantních souřadnic b_j druhého

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = a^1b_1 + a^2b_2 + \cdots + a^nb_n \tag{12}$$

Platnost (10) ukážeme dosazením do vztahu $v_i = \langle\mathbf{v},\mathbf{a}_i\rangle$. Odvození uděláme pro jednoduchost pouze pro případ dimenze $n = 3$.

$$\begin{aligned} v_i \;=\; & \langle\mathbf{v},\mathbf{a}_i\rangle = \text{(dosadíme za } \mathbf{v}\text{)} = \langle v^1\mathbf{a}_1 + v^2\mathbf{a}_2 + v^3\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_i\rangle = \\ & \text{(použijeme aditivitu)} = \langle v^1\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_i\rangle + \langle v^2\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_i\rangle + \langle v^3\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_i\rangle = \\ & \text{(použijeme homogenitu)} = v^1\langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_i\rangle + v^2\langle\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_i\rangle + v^3\langle\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_i\rangle = \\ & \text{(použijeme symetrii)} = v^1\langle\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_1\rangle + v^2\langle\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_2\rangle + v^3\langle\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_3\rangle \end{aligned}$$

Ukažme ještě platnost (12).

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle \;=\; & (\text{dosadíme za } \mathbf{b}) \;= \langle b^1\mathbf{a}_1 + b^2\mathbf{a}_2 + b^3\mathbf{a}_3, \mathbf{c}\rangle = \\ & (\text{použijeme aditivitu}) \;= \langle b^1\mathbf{a}_1, \mathbf{c}\rangle + \langle b^2\mathbf{a}_2, \mathbf{c}\rangle + \langle b^3\mathbf{a}_3, \mathbf{c}\rangle = \\ & (\text{použijeme homogenitu}) \;= b^1\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{c}\rangle + b^2\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{c}\rangle + b^3\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{c}\rangle = \\ & (\text{nahradíme skalární součiny kovariantními souřadnicemi}) \;= b^1c_1 + b^2c_2 + b^3c_3\end{aligned}$$

Vztahy (11), (12) dávají

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \left({}^{\mathcal{A}}\mathbf{a}\right)^T G_{\mathcal{A}}\, {}^{\mathcal{A}}\mathbf{b} \tag{13}$$

2.2 Metrika pro ortogonální a ortonormální bazi

Je-li baze $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ ortogonální, platí pro $i \neq j$ $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle = 0$ (kritérium kolmosti). Metrika (matice skalárních součinů vektorů baze) je potom rovna

$$G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1\rangle & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2\rangle & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \langle \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n\rangle \end{pmatrix}$$

Pro ortonormální bazi je navíc $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i\rangle = 1$ (vektory baze jsou jednotkové). Matice $G_{\mathcal{A}}$ je tedy jednotkovou maticí. Pro kovariantní a kontravariantní souřadnice vzhledem k ortonormální bazi tedy platí

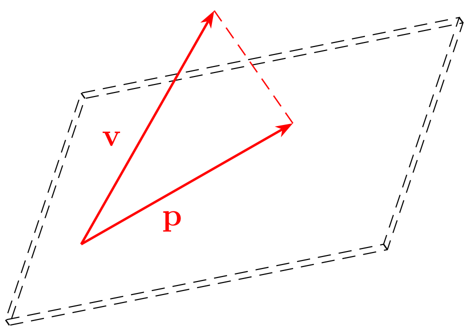
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

nebo-li

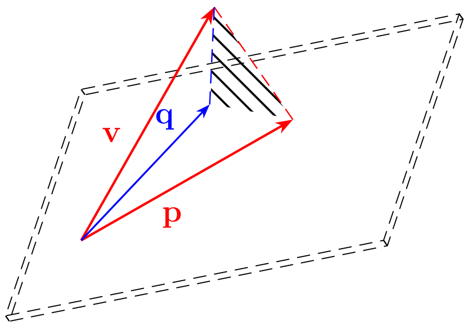
$${}_{\mathcal{A}}\mathbf{v} = {}^{\mathcal{A}}\mathbf{v} \tag{14}$$

Ve vztahu (12) pak můžeme zaměnit kovariantní a kontravariantní souřadnice a (12) je identický se vztahem (5) platným v kartézských souřadnicích.

3 Ortogonální projekce jako nejlepší aproximace



Na obrázku je znázorněn vektor $\mathbf{v}$ a jeho kolmá projekce $\mathbf{p}$ na rovinu vyznačenou rovnoběžníkem. Zdůrazněme jednu vlastnost kolmé projekce vektoru: $\|\mathbf{v} - \mathbf{p}\|$ je rovno vzdálenosti koncového bodu vektoru $\mathbf{v}$ od roviny (na kterou promítáme) a pro libovolný vektor $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ ležící v uvažované rovině je $\|\mathbf{v} - \mathbf{q}\| > \|\mathbf{v} - \mathbf{p}\|$.



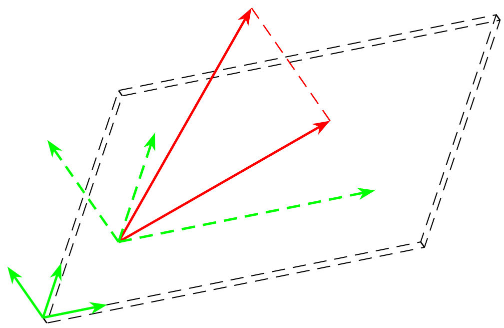
Na dalším obrázku je přidán vektor $\mathbf{q}$ a čárkovaně vyznačen vektor $\mathbf{v} - \mathbf{q}$. Nezdáli se vám, že platí $\|\mathbf{v} - \mathbf{q}\| > \|\mathbf{v} - \mathbf{p}\|$, uvědomte si, že červeně čárkovaná úsečka je kolmá na průmětnu a je tedy odvěsnou ve vyšrafovaném trojúhelníku. Ve stejném trojúhelníku je modrá čárkovaná úsečka přeponou.

Jak můžeme vyjádřit projekci $\mathbf{p}$ vektoru $\mathbf{v}$, máme-li ortonormální bazi složenou ze dvou vektorů $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ležících v průmětně a normálového vektoru $\mathbf{e}_3$?
Souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bazi $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ jsou, jak plyne z (1) i z (14) $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v}\rangle$, $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v}\rangle$, $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{v}\rangle$, a tedy

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e}_3$$

a

$$\mathbf{p} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e}_2$$



Nyní si místo roviny představme prostor $\mathcal{P}_k$ polynomů stupně nejvýše k a na místě vektoru $\mathbf{v}$ funkci g (definovanou na intervalu $\langle 0, 1\rangle$). Budeme hledat polynom $P \in \mathcal{P}_k$ pro nějž je integrál

$$\int_0^1 (g(x) - P(x))^2 \, dx$$

minimální.
Nejlepší aproximace funkce g na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ polynomem 2. stupně je

$$\langle g, e_0\rangle e_0 + \langle g, e_1\rangle e_1 + \langle g, e_2\rangle e_2 \tag{15}$$

pokud polynomy e_1, e_2, e_3 tvoří ortonormální bazi vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$. Tvoří-li polynomy f_1, f_2, f_3 bazi ortogonální, je

$$\frac{\langle g, f_0\rangle}{\langle f_0, f_0\rangle} f_0 + \frac{\langle g, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1 + \frac{\langle g, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle} f_2 \tag{16}$$

3.1 Vytvoření ortogonální baze (Gramm – Schmidtův algoritmus)

Na prostoru polynomů stupně druhého a menšího definujeme skalární součin.

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\, dx \tag{17}$$

(V kapitole 2 jsme ukázali že je to opravdu skalární součin – tj. že splňuje vlastnosti 1. – 4. z této kapitoly.)
Zjistíme, zda je kanonická baze $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, a_2\}$, kde $a_i : x \mapsto x^i$ pro $i = 0, 1, 2$, na prostoru se skalárním součinem (17) ortonormální případně alespoň ortogonální. Za tím účelem vypočteme skalární součiny

$$\begin{aligned}
\langle a_0, a_0 \rangle &= \int_0^1 a_0(x) a_0(x)\, dx = \int_0^1 1\, dx = 1 \\
\langle a_0, a_1 \rangle &= \int_0^1 a_0(x) a_1(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx = 1/2 \\
&\vdots \\
\langle a_1, a_2 \rangle &= \int_0^1 a_1(x) a_2(x)\, dx = \int_0^1 x^3\, dx = 1/4 \\
&\vdots \\
\langle a_2, a_2 \rangle &= \int_0^1 a_2(x) a_2(x)\, dx = \int_0^1 x^4\, dx = 1/5
\end{aligned}$$

a vytvoříme matici

$$G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \langle a_0, a_0 \rangle & \langle a_0, a_1 \rangle & \langle a_0, a_2 \rangle \\ \langle a_1, a_0 \rangle & \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle \\ \langle a_2, a_0 \rangle & \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že baze $\mathcal{A}$ není ani ortonormální ani ortogonální - srovnej s kapitolou 2.2. Chceme použít některý ze vztahů (15), (16) a k tomu potřebujeme ortogonální bazi. Vytvoříme ji z baze $\mathcal{A}$ následovně

$$f_0 = a_0, \qquad f_1 = a_1 + \alpha f_0, \qquad f_2 = a_2 + \beta f_0 + \gamma f_1 \tag{18}$$

kde koeficienty (čísla) α, β, γ vypočteme z podmínek ortogonality (výpočet viz dále)

$$\langle f_0, f_1 \rangle = \langle f_0, f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle = 0$$

Z ortogonální baze $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2\}$ získáme ortonormální bazi $\mathcal{E} = \{e_0, e_1, e_2\}$

$$e_i = f_i / \|f_i\|, \qquad \text{pro } i = 0, 1, 2 \tag{19}$$

Nyní odvodíme vztahy pro koeficienty α, β, γ. Dosadíme-li za f_1 z (18), dostaneme

$$\langle f_0, f_1 \rangle = \langle f_0, a_1 + \alpha f_0 \rangle = \text{(použijeme linearitu)} = \langle f_0, a_1 \rangle + \alpha \langle f_0, f_0 \rangle$$

Z podmínky $\langle f_0, f_1 \rangle = 0$ (vektory ortonormální baze jsou kolmé) dostaneme

$$\langle f_0, a_1 \rangle + \alpha \langle f_0, f_0 \rangle = 0$$

a tedy

$$\alpha = -\langle f_0, a_1 \rangle / \langle f_0, f_0 \rangle \tag{20}$$

Podobně odvodíme

$$\beta = -\langle f_0, a_2\rangle / \langle f_0, f_0\rangle \tag{21}$$

$$\gamma = -\langle f_1, a_2\rangle / \langle f_1, f_1\rangle \tag{22}$$

Vidíme, že k výpočtu čísel α, β, γ potřebujeme spočítat celkem 5 skalárních součinů. Tři z nich můžeme bezprostředně určit z matice $G_{\mathcal{A}}$.

$$\begin{aligned} \langle f_0, a_1\rangle &= \langle a_0, a_1\rangle = 1/2 \\ \langle f_0, f_0\rangle &= \langle a_0, a_0\rangle = 1 \\ \langle f_0, a_2\rangle &= \langle a_0, a_2\rangle = 1/3 \end{aligned}$$

odtud je

$$\alpha = -1/2, \qquad f_1 = a_1 - 1/2a_0, \qquad \beta = -1/3$$

Na výpočet zbylých dvou použijeme vztah (13), prvky matice $G_{\mathcal{A}}$ již máme spočítány, souřadnice uvažovaných funkcí vzhledem k bazi $\mathcal{A}$ jsou

$$^{\mathcal{A}}a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ^{\mathcal{A}}f_1 = {}^{\mathcal{A}}(a_1 + \alpha f_0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a postupně počítáme (používáme přitom (13))

$$\langle f_1, a_2\rangle = \left(^{\mathcal{A}}f_1\right)^T G_{\mathcal{A}}\, {}^{\mathcal{A}}a_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1/4 + 1/3 = 1/12$$

$$\langle f_1, f_1\rangle = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1/2(-1/2+1/2) + 1(-1/4+1/3) = 1/12$$

Odtude je

$$\gamma = -1$$

a

$$f_2 = a_2 - 1/3f_0 - f_1 = \text{ (po dosazení) } = a_2 - 1/3a_0 - (a_1 - 1/2a_0) = a_2 - a_1 + a_0/6$$

Ještě budeme potřebovat

$$\begin{aligned} \langle f_2, f_2\rangle &= \begin{pmatrix} 1/6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ & 1/6(1/6 - 1/2 + 1/3) - 1(1/12 - 1/3 + 1/4) + 1(1/18 - 1/4 + 1/5) = 1/180 \end{aligned}$$

Hledaná ortogonální baze tedy je

$$f_0 : x \to 1, \quad f_1 : x \to x - 1/2, \quad f_2 : x \to x^2 - x + 1/6 \tag{23}$$

Normy funkcí $f_0, \ldots, f_2$ jsou

$$\|f_0\| = 1, \quad \|f_1\| = 1/\sqrt{12}, \quad \|f_2\| = 1/\sqrt{180} \tag{24}$$

a tedy ortonormální baze je

$$e_0 : x \to 1, \quad e_1 : x \to \sqrt{3}\,(2x-1), \quad e_2 : x \to \sqrt{5}\,(6x^2 - 6x + 1) \tag{25}$$

3.2 Aproximace exponenciální funkce

Budeme aproximovat funkci $\exp : x \mapsto e^x$, proto vypočteme skalární součiny (integrály)

$$
\begin{aligned}
\langle a_0, \exp \rangle &= \int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1 \\
\langle a_1, \exp \rangle &= \int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - (e-1) = 1 \\
\langle a_2, \exp \rangle &= \int_0^1 x^2 e^x \, dx = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x \, dx = e - 2
\end{aligned}
$$

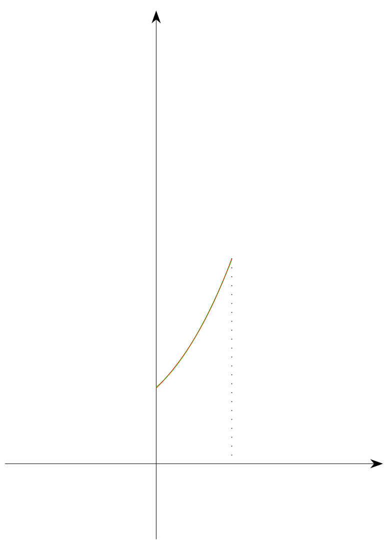
Zmiňovanou nejlepší aproximaci p získáme dosazením buď (23) a (24) do (16) nebo (25) do (15)

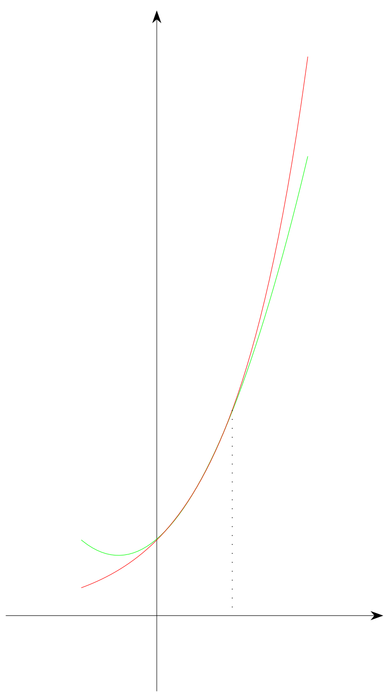
$$
p(x) \quad = \quad (e-1) + 12 \, [1 - 1/2(e-1)] \, (x - 1/2) + 180 \, [(e-1)/6 - 1 + e - 2] \, (1/6 - x + x^2)
$$

Postupnou úpravou - nejdříve roznásobením a poté sdružením členů se stejnou mocninou x dostaneme

$$
p(x) = 30(7e - 19)x^2 + 12(49 - 18e)x + 3(13e - 35)
$$

V jakém smyslu je aproximace nejlepší? Hodnota integrálu $\int_0^1 (e^x - p(x))^2 \, dx$ vyjde nejmenší ze všech polynomů stupně 2 a menšího. Na obrázcích jsou červeně grafy exponenciální funkce a zeleně vypočteného kvadratického polynomu. Na prvním obrázku v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, na druhém v intervalu $\langle -1, 2 \rangle$.





V tabulce na další stránce jsou hodnoty e^x a $p(x)$ pro $x = -0.5, -0.4, \ldots, 1.5$. Červeně jsou uvedeny rozdíly $e^x - p(x)$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

x	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1
e^x	0.797	0.807	0.833	0.876	0.936	1.013	1.107
$p(x)$	0.607	0.670	0.741	0.819	0.905	1.000	1.105
$e^x - p(x)$	-0.191	-0.136	-0.092	-0.058	-0.031	-0.013	-0.001
x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
e^x	1.217	1.344	1.488	1.648	1.826	2.020	2.231
$p(x)$	1.221	1.350	1.492	1.649	1.822	2.014	2.226
$e^x - p(x)$	0.005	0.006	0.004	0.0004	-0.004	-0.006	-0.005
x	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
e^x	2.459	2.703	2.965	3.243	3.538	3.849	4.178
$p(x)$	2.460	2.718	3.004	3.320	3.669	4.055	4.482
$e^x - p(x)$	0.001	0.015	0.040	0.077	0.132	0.206	0.304