Požadavky ke zkoušce z AN3E

19. prosince 2018

1. Parciální funkce, parciální derivace, derivace podle vektoru a jejich geometrický význam. Parciální derivace jako speciální typ derivace podle vektoru.

   Zdroj: [3]

2. Euklidovská vzdálenost a její vlastnosti (pozitivita, symetrie, trojúhelníková nerovnost) včetně důkazu jejich platnosti.

   Okolí bodu v $\mathbb{R}^d$, definice limity posloupnosti a funkce. Výpočet limity (posloupnosti a funkce do $\mathbb{R}^d$) po složkách – formulace věty a hlavní myšlenka jejího důkazu.

   Limity funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, výpočet limity po přímkách a souvislost s limitou funkce. Příklad funkce dvou proměnných, která má v bodě limity po přímkách, jsou si rovny, ale nemá limitu ($(x, y) \mapsto xy^2/(x^2 + y^4)$).

   Věta o limitě součinu funkce s nulovou limitou a omezené funkce a použití věty na limity funkcí více proměnných.

   Zdroj: [4]

3. Derivace funkce jako lineární aproximace, rovnice tečné roviny. Věta o existenci derivace za předpokladu spojitých parciálních derivací a její důkaz pro funkci dvou proměnných (v [1], věty 2.19, 2.20 je pro funkci n proměnných).

   Definice slabé derivace, důkaz homogenity, důkaz, že aditivita geometricky znamená tečny v jedné rovině. Příklad funkce, jejíž tečny netvoří rovinu (například rozšíření funkce $(x, y) \mapsto xy^2/(x^2 + y^4)$ do bodu $(0, 0)$ a tečny v tomto bodě). Definice silné derivace, aproximační vlastnosti, příklad o měření strany trojúhelníku a výpočet chyby měření, [1], příklad 2.22, str. 61.

   Věta o spojitosti funkce v bodě, ve kterém má silnou derivaci ([1], 2.14, str. 55). Příklad funkce, která má v bodě nespojitosti slabou derivaci.

   Pravidlo pro derivaci složené funkce – důkaz a vysvětlení na příkladu vyjádření Laplaceova operátoru ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$) v polárních souřadnicích.

   Zdroj: [2] a výše citované partie z [1]

4. Metrické prostory, definice a příklady, metrika odvozená od normy, diskrétní metrika. Koule a sféry v jednotlivých metrikách.

   Vnitřní, hraniční a vnější body, otevřené a uzavřené množiny. Kompaktní množiny a věta o existenci extrémů spojité funkce na kompaktní množině. Hromadné a izolované body množiny, vysvětlení na konkrétních příkladech.

5. Stacionární body funkce více proměnných, geometrický význam (poloha tečen, tečné roviny vzhledem k souřadným osám a souřadným rovinám). Lokální extrémy, kvadratické formy, typy kvadratických forem (pozitivně definitní, negativně definitní, indefinitní) a metody zjišťování typu kvadratické formy. Taylorův polynom druhého stupně pro funkci dvou proměnných, souvislost extrému s typem kvadratické formy.

   Kompaktní množiny a věta o existenci extrémů spojité funkce na kompaktní množině.

   Vázané extrémy, metoda Lagrangeových multiplikátorů.

6. Dvojné a dvojnásobné integrály, Fubiniova věta. Trojné a trojnásobné integrály. Statický moment obrazce/tělesa, poloha těžiště, výpočet těžiště obrazce/tělesa pomocí integrálu.

   Výpočet dvojného integrálu v polárních souřadnicích. Jacobiho matice, jakobián, geometrický význam – plocha průniku výseče a mezikruží. Výpočet trojného integrálu ve sférických souřadnicích, výpočet jakobiánu.

7. Poslounosti a řady funkcí. Bodová a stejnoměrná konvergence. Vysvětlení na příkladech a grafech.

   Příklad posloupnosti spojitých funkcí s nespojitou limitou ($\{x \mapsto \sin^{2n} x\}_{n=1}^{\infty}$). Věta o spojitosti limity stejnoměrně konvergentní posloupnosti spojitých funkcí a její důkaz.

   Komplexní čísla, absolutní hodnota komplexního čísla, odvození vzorce pro absolutní hodnotu součinu a podílu komplexních čísel, trojúhelníková nerovnost pro součet komplexních čísel.

   Limita posloupnosti komplexních čísel, geometrická posloupnost a geometrická řada v oboru komplexních čísel, součet geometrické řady, odvození součtu včetně podmínky pro konvergenci.

   Mocninné řady. Věty o poloměru konvergence mocninné řady, o spojitosti součtu mocninné řady na kruhu konvergence, o poloměru konvergence řady zderivované člen po členu, o derivaci řady člen po členu i s důkazy.

   Zdroj: [5], odstavce 1 – 6, 8 – 13.

Reference

[1] Luděk Zajíček. Skripta.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~zajicek/skriptamn.htm`.

[2] M. Š. Derivace funkcí více proměnných.
na `https://kap.fp.tul.cz/~simunkova`.

[3] M. Š. Parciální funkce a parciální derivace.
na `https://kap.fp.tul.cz/~simunkova`.

[4] M. Š. Spojitost a limita funkcí více proměnných.
na `https://kap.fp.tul.cz/~simunkova`.

[5] M. Š. Řady funkcí.
na `https://kap.fp.tul.cz/~simunkova`.