

Vzorová písemka z předmětu AN3E
13. prosince 2018

Jméno a příjmení:

(Toto je formát písemky z AN3E, která bude obsahovat čtyři příklady.)

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

1. Kterou z funkcí f_1 , f_2 , f_3 je možné spojitě rozšířit na \mathbb{R}^2 ?

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^3}{x^2 + y^2} \quad f_2 : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$$

2. Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $[2, -1]$ podle vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} . Tyto derivace jsou směnicemi tečen ke křivkám – k jakým? Jak tyto křivky získáte z grafu funkce f ?

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^3 - y}{x + y} \quad \mathbf{u} = (4, -3) \quad \mathbf{v} = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$$

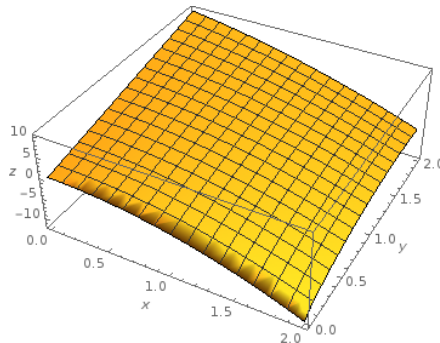
3. Zjistěte podle kterých vektorů je derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0 = \left[\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right]$ nulová. Jakou vzájemnou polohu má tento vektor vzhledem k vrstevnici funkce f ? Podle kterého jednotkového vektoru je derivace funkce f v bodě \mathbf{x}_0 maximální a podle kterého minimální?

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - xy$$

4. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $\mathbf{a} = [1, 1]$.

$$f : (x, y) \mapsto x^2\sqrt{y} - xy^2 + 5y - 3x^2$$

Na obrázku je graf funkce f . Dokreslete do něj průsečnici tečné roviny se souřadnou rovinou xy . Z rovnice tečné roviny odvoďte rovnici této průsečnice a porovnejte s obrázkem.



5. Zdůvodněte, že má funkce f silnou derivaci v bodě $\mathbf{a} = [1, 1]$ a tuto derivaci napište.

$$f : (x, y) \mapsto x^2\sqrt{y} - xy^2 + 5y - 3x^2$$

6. Nalezněte stacionární body funkce f a určete jejich typ. Jakou polohu má tečná rovina ve stacionárních bodech vzhledem k souřadným osám a souřadným rovinám?

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - xy + y^3 - 2y^2 - 3y$$

7. Nalezněte maximální a minimální hodnotu, kterou nabývá funkce f na množině M . Načrtněte množinu M a vyznačte na ní body, v nichž funkce f nabývá extrémních hodnot a ke každému z těchto bodů načrtněte vrstevnici funkce f , která jím prochází.

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + xy, \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \geq y \geq x^2 - 1\}$$

8. Zdůvodněte, že funkce f nabývá na trojúhelníku o vrcholech $[-2, 0]$, $[0, 4]$, $[3, 0]$ minimální a maximální hodnoty a tyto hodnoty vypočtěte.

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - xy + y$$

9. Zdůvodněte, že funkce f nabývá na kružnici o rovnici $x^2 - 4x + y^2 - 5y = 0$ minimální a maximální hodnoty a tyto hodnoty vypočtěte. Dále kružnici zakreslete do souřadné soustavy, nalezněte graficky body, v nichž funkce f nabývá extrémů a porovnejte s vypočtenými body.

$$f : (x, y) \mapsto 2x + 3y$$

10. Množina M je trojúhelník ABC , popište množiny $M_{x,*} = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\}$. Pro která $x \in \mathbb{R}$ je $M_{x,*}$ prázdná množina? Pro která x jednoprvková množina? Pro která x interval? Napište tyto intervaly.

To samé udělejte pro množiny $M_{*,y} = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\}$.

$$A = [-1, 0], \quad B = [2, 0], \quad C = [1, 3]$$

11. Vypočtěte dvojný integrál funkce f přes trojúhelník ABC

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - y, \quad A = [-1, 0], B = [2, 0], C = [1, 3]$$

12. Vypočtete obsah a souřadnice těžiště obrazce \mathcal{O} . Před výpočtem obrazec zakreslete do soustavy souřadné a odhadněte počítané veličiny. Vypočtené výsledky porovnejte s jejich odhady.

$$\mathcal{O} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x\}$$

13. Vypočtete vzdálenost těžiště polokoule o poloměru R od středu příslušné koule. Před výpočtem výsledek odhadněte a svůj odhad porovnejte s vypočtenou hodnotou.
14. Vypočtete poloměr konvergence mocninné řady. Co z vypočteného poloměru lze usoudit o oboru konvergence a absolutní konvergence řady? Znázorněte graficky.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k 3^k}{(k+3)2^k} (z+2)^k$$

15. Rozviňte funkci f v mocninnou řadu se středem v bodě $z_0 = 0$, napište první čtyři nenulové členy této řady, určete její poloměr konvergence a zakreslete kruh konvergence do komplexní roviny.

$$f : z \mapsto \frac{2z}{3+z}$$

16. Rozviňte funkci f v mocninnou řadu se středem v bodě $z_0 = 1$, napište první čtyři nenulové členy této řady, určete její poloměr konvergence a zakreslete kruh konvergence do komplexní roviny.

$$f : z \mapsto \frac{2z}{z^2 - 6z + 8}$$