Derivace funkcí více proměnných

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
26. dubna 2022

1. Derivace podle vektoru jako funkce vektoru.
Pro pevně zvolenou funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ a bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ budeme zkoumat zobrazení, které vektoru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ přiřadí vektor $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n$, tedy derivaci funkce f podle vektoru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$. Toto zobrazení označíme L.

Připomeneme definici derivace funkce podle vektoru

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

Je to limita funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$ a o té víme, že se počítá po složkách.

Příklady.

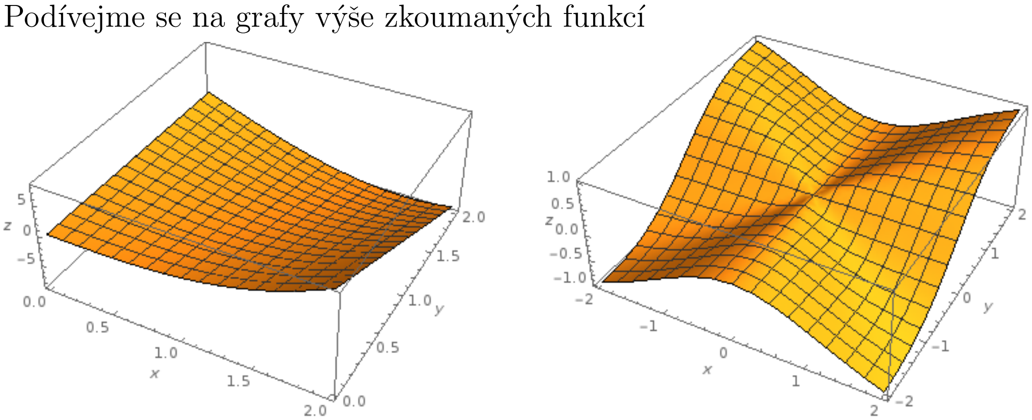
1. $f(x, y) = x^3 - 4xy$, $\mathbf{a} = (1, 1)$

$$\begin{aligned} L : \mathbf{v} \mapsto D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) &= \lim_{t \to 0} \frac{(1 + v_1 t)^3 - 4(1 + v_1 t)(1 + v_2 t) + 3}{t} = \cdots \\ &= \lim_{t \to 0} (3v_1 + 3v_1^2 t + v_1^3 t^2 - 4v_1 - 4v_2 - 4v_1 v - 2t) \\ &= -v_1 - 4v_2 \end{aligned}$$

2. $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ rozšířená nulou do bodu $\mathbf{a} = (0, 0)$

$$L : \mathbf{v} \mapsto D_{\mathbf{v}} g(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{(0 + v_1 t)^2 (0 + v_2 t)}{((0 + v_1 t)^2 + (0 + v_2 t)^2)} \frac{1}{t} = \cdots = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

2. Slabá derivace.
Podívejme se na grafy výše zkoumaných funkcí



Obrázky jsou vygenerovány na wolframalpha.com

Derivace podle vektoru souvisí s tečnou řezu grafu ve směru vektoru. U funkce f tyto tečny leží ve společné rovině (viz obrázek vlevo), u funkce g nikoliv (viz obrázek vpravo). To, zda tečny tvoří rovinu, souvisí s tím, zda je zobrazení L lineární (TODO: UKÁZAT

SOUVISLOST ADITIVITY A SPOLEČNÉ ROVINY TEČEN). A to nás vede k definici derivace, kterou nazýváme *slabou derivací.*

Definice slabé derivace. Lineární zobrazení, které vektoru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ přiřadí derivaci funkce f v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ podle vektoru $\mathbf{v}$ nazýváme *slabou derivací funkce f v bodě* $\mathbf{a}$. Poznamenejme, že pro funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ je slabá derivace také zobrazením $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^n$.

Příklady. Ve výše uvedeném příkladu má funkce f v bodě $(1,1)$ slabou derivaci $L : (v_1, v_2) \mapsto -v_1 - 4v_2$. Funkce g v bodě $(0,0)$ slabou derivaci nemá.

Poznámky.

1. Parciální derivace je speciálním případem derivace podle vektoru. Pro funkci dvou proměnných x, y je parciální derivace podle x derivací podle vektoru $(1,0)$ a parciální derivace podle y derivací podle vektoru $(0,1)$.

2. Má-li funkce dvou proměnných slabou derivaci, pak je tato derivace tvaru $L : (v_1, v_2) \mapsto L_1 v_1 + L_2 v_2$. Vektoru $\mathbf{v} = (1,0)$ přiřadí L číslo L_1. Proto je L_1 rovno hodnotě parciální derivace podle x. Podobně je L_2 rovno hodnotě parciální derivace podle y. Slabá derivace tedy, pokud existuje, má tvar

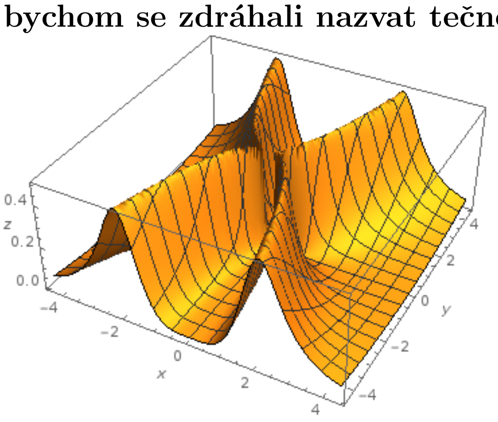
$$L : (v_1, v_2) \mapsto v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})$$

   Pomocí gradientu a skalárního součinu můžeme slabou derivaci zapsat

$$L : (v_1, v_2) \mapsto (v_1, v_2) \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \tag{1}$$

3. Vztah (1) platí jen v případě existence slabé derivace. Funkce g zkoumaná výše má v bodě $\mathbf{a} = (0,0)$ gradient $\operatorname{grad} g(\mathbf{a}) = (0,0)$, ale nemá slabou derivaci.

Příklad slabé derivace – tedy geometricky tečen v jedné rovině – kterou bychom se zdráhali nazvat tečnou rovinou.



Obrázek je vygenerován na wolframalpha.com

Na obrázku je graf funkce $f : (x,y) \mapsto \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$ rozšířený nulou do bodu $\mathbf{a} = (0,0)$.
Vypočteme derivaci v bodě $\mathbf{a}$ podle vektoru $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{(v_1 t)^4 (v_2 t)^2}{((v_1 t)^8 + (v_2 t)^4) t} = \frac{v_1^4 v_2^2 t}{v_1^8 t^4 + v_2^4} = 0$$

Odtud plyne $\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = (0,0)$ a také existence slabé derivace

$$L : \mathbf{v} \mapsto 0$$

Z grafu a z $f(x,0) = 0$, $f(x, x^2) = 1/2$ plyne, že funkce není v bodě $\mathbf{a} = (0,0)$ spojitá. To nás vede k definici *silné derivace.* Uvidíme, že spojitost je důsledek existence silné derivace. Výše uvedený příklad ukazuje, že slabá derivace spojitost nezaručuje.

3. Silná derivace.

Definice. Lineární zobrazení L nazveme *silnou derivací funkce* f *v bodě* $\mathbf{a}$, pokud platí

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{o}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{v})}{\|\,\mathbf{v}\,\|} = \mathbf{o} \tag{2}$$

Silnou derivaci funkce f v bodě $\mathbf{a}$ značíme $f'(\mathbf{a})$ nebo $df(\mathbf{a})$, případně $Df(\mathbf{a})$. O kolizi značení pro funkci jedné proměnné – jednou je $f'(a)$ číslo, podruhé lineární zobrazení – viz následující poznámky a [2], definice 2.6, poznámka 2.7, [1], příklad 5.2.10 a poznámka 5.2.11.

Poznámky.

1. Místo silná derivace se často říká *derivace*. Další často používaný termín je *totální diferenciál* nebo jen *diferenciál*.
2. Je-li f funkce z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^n$, pak je i silná derivace zobrazením z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^n$.
3. Pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tedy funkci jedné proměnné je v definici silné derivace $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$, budeme ho tedy značit netučně a. Podobně budeme $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$ značit v a místo $\mathbf{o}$ napíšeme 0. Místo $L(\mathbf{v})$ budeme psát součin Lv, kde L není zobrazení, ale reálné číslo. Místo normy napíšeme absolutní hodnotu. Dostaneme

   $$\lim_{v\to 0} \frac{f(a+v) - f(a) - Lv}{|v|} = 0$$

   Odstraněním absolutní hodnoty se nezmění limita zprava a limita zleva změní znaménko. Můžeme tedy vztah nahoře ekvivalentně přepsat na

   $$\lim_{v\to 0} \frac{f(a+v) - f(a) - Lv}{v} = 0$$

   a to je ekvivalentní s

   $$\lim_{v\to 0} \frac{f(a+v) - f(a)}{v} = L$$

   Závěr. V případě funkce jedné proměnné je existence silné derivace ekvivalentní existenci derivace a silná derivace v bodě a je zobrazení $L : v \mapsto f'(a)v$.

Věta o tvaru silné derivace. Má-li funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ silnou derivaci, pak má tato tvar

$$L : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{a})$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro funkci z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$ a do (2) dosadíme $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ a vyjádříme $L(\mathbf{v}) = L_1 v_1 + L_2 v_2$. Naším cílem je tedy ukázat

$$L_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \qquad L_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})$$

Ze vztahu (2) v definici silné derivace plyne, že i limity po přímkách jsou rovny nule. Po dosazení $v_2 = 0$ dostaneme

$$\lim_{v_1\to 0} \frac{f(a_1+v_1, a_2) - f(a_1, a_2) - L_1 v_1}{|v_1|} = 0$$

Odtud stejnou úvahou jako v poznámce 3 dostaneme

$$\lim_{v_1\to 0} \frac{f(a_1+v_1,a_2)-f(a_1,a_2)}{v_1} = L_1$$

a tedy

$$L_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$$

Podobně bychom dostali

$$L_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})$$

□

Věta o silné a slabé derivaci. Má-li funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ silnou derivaci, pak má v tomto bodě i slabou derivaci a jsou si rovny.

DŮKAZ. Zvolíme $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ a do (2) dosadíme $\mathbf{v} = t\,\mathbf{u}$. Dostaneme

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\,\mathbf{u})-f(\mathbf{a})-L(t\,\mathbf{u})}{\|t\,\mathbf{u}\,\|} = \mathbf{o}$$

po úpravě

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\,\mathbf{u})-f(\mathbf{a})-tL(\mathbf{u})}{|t|\|\,\mathbf{u}\,\|} = \mathbf{o}$$

a po vynásobení $\|\,\mathbf{u}\,\|$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\,\mathbf{u})-f(\mathbf{a})-tL(\mathbf{u})}{|t|} = \mathbf{o}$$

Nyní stejnou úvahou jako v poznámce 3 odstraníme absolutní hodnotu a upravíme na

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\,\mathbf{u})-f(\mathbf{a})}{t} = L(\mathbf{u})$$

Dostáváme tedy pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ rovnost $L(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$, tedy rovnost silné a slabé derivace. Pro $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ výsledek plyne z linearity obou derivací. □

Věta o existenci silné derivace. Má-li funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ spojité parciální derivace prvního řádu, pak má v bodě $\mathbf{a}$ silnou derivaci

$$L : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{a})$$

DŮKAZ provedeme pro $d = 2$. Přírůstek funkce napíšeme jako součet přírůstků ve směru souřadných os – nakreslete obrázek obsahující body $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$, $\mathbf{a}+\mathbf{v} = (a_x+v_x, a_y+v_y)$, (a_x+v_x, a_y).

$$f(a_x+v_x,a_y+v_y)-f(a_x,a_y) = f(a_x+v_x,a_y+v_y)-f(a_x+v_x,a_y)+f(a_x+v_x,a_y)-f(a_x,a_y)$$

Na rozdíly na pravé straně použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Dostaneme

$$f(a_x+v_x,a_y+v_y)-f(a_x,a_y) = v_y\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{c}) + v_x\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{d})$$

kde bod $\mathbf{c}$ leží někde na úsečce mezi body $(a_x + v_x, a_y + v_y)$, $(a_x + v_x, a_y)$ a bod $\mathbf{d}$ mezi body $(a_x + v_x, a_y)$, (a_x, a_y), Od obou stran odečteme $L(\mathbf{v})$

$$f(a_x+v_x, a_y+v_y)-f(a_x, a_y)-(v_x, v_y)\cdot\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = v_y\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{c}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})\right)+v_x\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{d}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})\right)$$

dosadíme do definice silné derivace

$$\frac{\left|v_y\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{c}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})\right) + v_x\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{d}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})\right)\right|}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

a upravíme

$$\left|\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{c}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})\right) + \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{d}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})\right)\right|$$

Chceme ukázat, že tento výraz má pro $(v_x, v_y) \to (0, 0)$ limitu rovnu nule. Ze spojitosti parciálních derivací víme, že rozdíly v závorkách mají nulovou limitu. O podílech zase víme, že nabývají hodnot mezi nulou a jednou. Věta o limitě součinu nulové a omezené funkce dá požadovaný výsledek. □

Poznámka. Víme, že limity funkce do vícerozměrného prostoru počítáme po složkách. Odtud plyne existence a výpočet silné derivace funkce $f = (f_1, \ldots, f_n)$ z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^n$ v bodě, ve kterém mají složky $f_1, \ldots f_n$ spojité parciální derivace prvního řádu. Ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad. Funkce f z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ daná předpisem $f : (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ má na $\mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace prvního řádu, má tedy silnou derivaci a ta je daná předpisem

$$(v_1, v_2) \mapsto (v_1\cos\varphi - v_2 r\sin\varphi, v_1\sin\varphi + v_2 r\cos\varphi)$$

což můžeme zapsat maticově

$$(v_1, v_2) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Definice Jacobiho matice a Jacobiánu. Nechť $f = (f_1, \ldots, f_n)$ je funkce z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^n$. Matici parciálních derivací prvního řádu funkce f nazýváme *Jacobiho maticí* funkce f

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

V případě $n = d$, kdy je Jacobiho matice čtvercová, nazýváme její determinant *Jacobiánem* funkce f.
Čteme: jakobiho matice, jakobián, spisovně je Jacobiova matice.

Věta o spojitosti a derivaci. Má-li funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ silnou derivaci v bodě $\mathbf{a}$, pak je v bodě $\mathbf{a}$ spojitá.

Důkaz. Z (2) plyne, že čitatel má nulovou limitu, tedy

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{o}}(f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{v})) = 0$$

Lineární zobrazení je spojité, tedy $L(\mathbf{v}) \to \mathbf{o}$ pro $\mathbf{v} \to \mathbf{o}$. Odtud plyne $\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{o}} f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{a})$ a tedy spojitost f v bodě $\mathbf{a}$. □

4. Taylorův polynom prvního stupně. Odvodíme z (2) vztah pro Taylorův polynom prvního stupně pro funkci dvou proměnných. Čitatel v (2) označíme R_1. Dostaneme po úpravě

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} + R_1$$

Označíme-li $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{a}+\mathbf{v} = (x, y)$, odkud vyjádříme $\mathbf{v} = (x - a_1, y - a_2)$, přepíšeme vztah na

$$f(x,y) = f(a_1,a_2) + (x-a_1)\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) + (y-a_2)\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) + R_1(x,y) \tag{3}$$

R_1 interpretujeme jako zbytek Taylorova polynomu. Z (2) plyne pro tento zbytek obdobná vlastnost jako v případě funkce jedné proměnné, tedy $R_1(x,y)/\|(x,y) - \mathbf{a}\| \to 0$ pro $(x,y) \to \mathbf{a}$.

Připomeňme ještě, že pro funkci jedné proměnné plynula uvedená vlastnost zbytku z existence derivace. Pro funkci dvou proměnných plyne z existence silné derivace. Žádná ze „slabších“ forem derivace, jako gradient nebo slabá derivace, vlastnost zbytku nezaručí.

Příklad. Výše jsme určili silnou derivaci funkce $(r,\varphi) \mapsto (r\sin\varphi, r\cos\varphi)$. Napíšeme Taylorovy polynomy jejích složek v bodě (r_0, φ_0)

$$\begin{aligned} r\cos\varphi &= r_0\cos\varphi_0 + (r-r_0)\cos\varphi_0 - (\varphi-\varphi_0)r_0\sin\varphi_0 + \tilde{R}_1(r,\varphi) \\ r\sin\varphi &= r_0\sin\varphi_0 + (r-r_0)\sin\varphi_0 + (\varphi-\varphi_0)r_0\cos\varphi_0 + \tilde{\tilde{R}}_1(r,\varphi) \end{aligned}$$

a zopakujeme, co platí pro jejich zbytky (uvádíme jen pro $\tilde{R}_1$, pro $\tilde{\tilde{R}}_1$ je vztah stejný)

$$\tilde{R}_1(r,\varphi)/\sqrt{(r-r_0)^2 + (\varphi-\varphi_0)^2} \to 0 \quad \text{pro } (r,\varphi) \to (r_0,\varphi_0)$$

Maticově napíšeme oba Taylorovy polynomy ve tvaru

$$\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0\cos\varphi_0 \\ r_0\sin\varphi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -r_0\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & r_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r-r_0 \\ \varphi-\varphi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{R}_1(r,\varphi) \\ \tilde{\tilde{R}}_1(r,\varphi) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Poznámka. Srovnejte (4) se vztahem pro funkci jedné proměnné

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x)$$

5. Derivace složené funkce. Pravidlo pro derivaci složené funkce odvodíme a vysvětlíme na příkladě. Máme funkci f proměnných x, y a dosadíme do ní polární souřadnice. Dostaneme funkci

$$g : (r,\varphi) \mapsto f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Naším cílem je vyjádřit gradient funkce g v bodě (r_0,φ_0) pomocí gradientu funkce f v bodě $(x_0,y_0) = (r_0\cos\varphi_0, r_0\sin\varphi_0)$. K výpočtu použijeme Taylorův polynom. Budeme tedy předpokládat existenci silné derivace funkce f v bodě (x_0,y_0).

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + R_1(x,y) \tag{5}$$

Taylorův polynom (5) zapíšeme v maticovém tvaru

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R_1(x,y) \tag{6}$$

Taylorův polynom vnitřní funkce jsme napsali v (4). Do (6) dosadíme

$$\begin{aligned} f(x,y) &= g(r,\varphi) \\ f(x_0,y_0) &= g(r_0,\varphi_0) \end{aligned}$$

a za $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ dosadíme z (4)

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi - r_0\cos\varphi_0 \\ r\sin\varphi - r_0\sin\varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -r_0\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & r_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r - r_0 \\ \varphi - \varphi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{R}_1(r,\varphi) \\ \tilde{\tilde{R}}_1(r,\varphi) \end{pmatrix}$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} g(r,\varphi) = {} & g(r_0,\varphi_0) + \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -r_0\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & r_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r - r_0 \\ \varphi - \varphi_0 \end{pmatrix} + \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -r_0\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & r_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{R}_1(r,\varphi) \\ \tilde{\tilde{R}}_1(r,\varphi) \end{pmatrix} + \\ & R_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

Dá se ukázat (my to vynecháme), že poslední dva řádky jsou součástí zbytku Taylorova polynomu

$$R(r,\varphi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -r_0\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & r_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{R}_1(r,\varphi) \\ \tilde{\tilde{R}}_1(r,\varphi) \end{pmatrix} + R_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Taylorův polynom pak napíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} g(r,\varphi) = {} & g(r_0,\varphi_0) + \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -r_0\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & r_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r - r_0 \\ \varphi - \varphi_0 \end{pmatrix} + \\ & R(r,\varphi) \end{aligned}$$

a gradient funkce g ve tvaru

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r_0,\varphi_0), \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r_0,\varphi_0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -r_0\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & r_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix}$$

nebo stručněji ve tvaru

$$\operatorname{grad} g(r_0,\varphi_0) = \operatorname{grad} f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -r_0\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & r_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix}$$

a pomocí gradientu zobrazení $h : (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ ve tvaru

$$\operatorname{grad} g(r_0, \varphi_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \operatorname{grad} h(r_0, \varphi_0)$$

Nakonec ještě napišme vztah po složkách

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} &= \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} &= -r\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \tag{7}$$

Výše uvedené odvození shrneme ve větě o derivaci složené funkce. Její důkaz neuvádíme, je zobecnění postupu ve výše uvedeném příkladě.

Věta o silné derivaci složeného zobrazení. Má-li funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ silnou derivaci a funkce $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ v bodě $f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$ silnou derivaci, pak má složená funkce $g \circ f : \mathbf{x} \mapsto g(f(\mathbf{x}))$ v bodě $\mathbf{a}$ silnou derivaci rovnu složenému zobrazení obou derivací.

Úlohy.

1. Vyjádřete z (7) derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2. Vyjádřete (za předpokladu spojitosti parciálních derivací druhého řádu) druhou derivaci $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
   Návod. Z předchozího cvičení jsme dostali
   $$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi}$$
   Dvojím použitím tohoto pravidla dostaneme
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)$$

3. Za předpokladů stejných jako v předchozím cvičení vyjádřete $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ a upravte do tvaru
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}$$

Reference

[1] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf.

[2] Luděk Zajíček. Skripta.
www.karlin.mff.cuni.cz/~zajicek/skriptamn.htm.