

1. Pro zobrazení  $f : (x, y) \mapsto \frac{6xy^2}{2x^2+y^2}$  a bod  $\mathbf{a} = (1, 0)$
- (a) napište silnou derivaci zobrazení  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$ ,
  - (b) napište rovnici tečné roviny v bodě  $\mathbf{a}$  (geometricky ke grafu v bodě  $(1, 0, f(1, 0))$ )
  - (c) napište Taylorův polynom stupně jedna zobrazení  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$ .

Totéž pro zobrazení  $f$  spojitě rozšířené na  $\mathbb{R}^2$  a bod  $\mathbf{b} = (0, 0)$ .

2. Na přednášce jsme odvodili vztahy

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} &= \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} &= -r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

a vyjádřili jsme z nich (pro  $r \neq 0$ )

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi}$$

- (a) Ukažte, že pro  $r \neq 0$  je  $\cos \varphi = \frac{\partial r}{\partial x}$ ,  $-\frac{\sin \varphi}{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . Použijte vztahy odvozené na začátku semestru:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ ,  $\varphi = \dots$
- (b) Vyjádřete obdobně  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- (c) V případě spojitých parciálních derivací druhého řádu funkce  $f$  platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \cos \varphi \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right) - \\ &\quad - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}$$

Upravte výraz na pravé straně rovnice.

- (d) Odvoďte obdobný vztah pro  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  a ukažte, že platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}$$