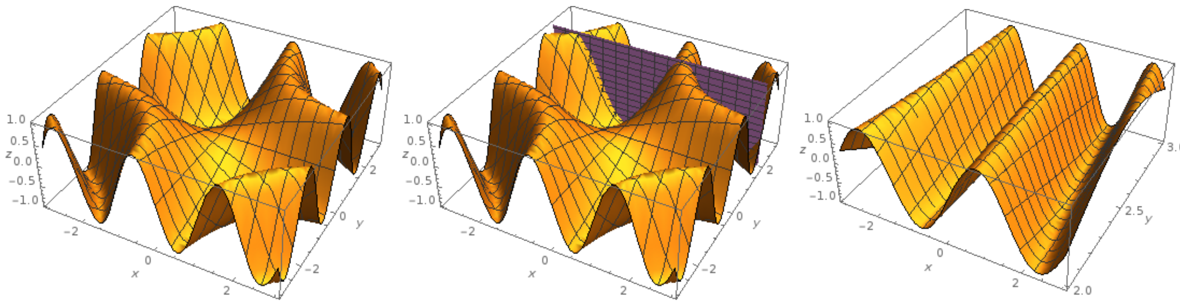
Parciální funkce a parciální derivace

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
16. května 2019

1. Parciální funkce.
Příklad: zvolíme-li ve funkci $f : (x, y) \mapsto \sin(xy)$ pevnou hodnotu y, například $y = 2$, dostaneme funkci $g : x \mapsto \sin(2x)$, kterou budeme nazývat *parciální funkcí funkce* f.
Na obrázku vlevo je graf funkce f pro $x \in [-3, 3]$, $y \in [-3, 3]$. Na prostředním obrázku je řez grafu funkce f rovinou o rovnici $y = 2$. Na obrázku vpravo je řez posunut na čelní stěnu. Tento řez je grafem parciální funkce g.



Obrázky jsou vygenerovány na wolframalpha.com

2. Parciální derivace je derivace parciální funkce.

Značení pro funkci f proměnných x, y: $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x, $\frac{\partial f}{\partial y}$, f'_y. Hodnotu derivace v bodě $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ značíme $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$, $f'_x(\mathbf{a})$, případně $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$.

Příklad $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - x \sin y}$.
$\frac{\partial f}{\partial x} = 1/2(x^2 - x\sin y)^{-1/2}(2x - \sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1/2(x^2 - x\sin y)^{-1/2}(-x\cos y)$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(2, \pi/6) = 1/2(4 - 2\sin\pi/6)^{-1/2}(4 - \sin\pi/6) = 7/(4\sqrt{3})$.

Příklady na procvičování: [2], str. 99, příklady 14.29 – 14.52; výsledky najdete na str. 108, 109 ve tvaru vektoru, jeho jednotlivé složky jsou parciální derivace.

A na závěr definice:

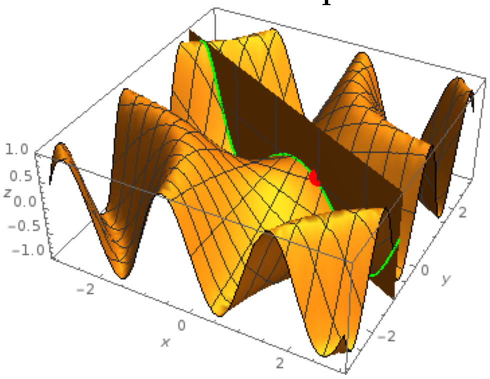
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}
\end{aligned}$$

3. Geometrický význam parciální derivace. Parciální derivace má stejný význam jako derivace funkce jedné proměnné – je to směrnice tečny grafu parciální funkce.

4. Parametrické rovnice přímky.
Parametrické rovnice přímky procházející bodem $\mathbf{a} = (1, 0)$ a mající směrový vektor $\mathbf{v} = (2, -1)$ jsou: $x = 1 + 2t$, $y = -t$.

Úkol. Vysvětlete, jak souvisí parametrické rovnice přímky s operacemi násobení vektoru číslem a sčítání vektorů.
NÁVOD: načrtněte geometrické vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ a k nim vektory $\mathbf{a} + 1/2\,\mathbf{v}$, $\mathbf{a} + \mathbf{v}$, $\mathbf{a} - \mathbf{v}$ a $\mathbf{a} + t\,\mathbf{v}$ pro další hodnoty t.

5. Zúžení funkce na přímku.



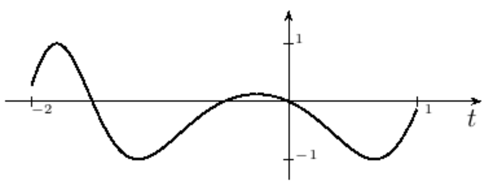
Obrázek je vygenerován na wolframalpha.com

Na obrázku je

1. graf funkce $f : (x, y) \mapsto \sin(xy)$,
2. rovina kolmá k souřadné rovině xy protínající ji v přímce určené bodem $\mathbf{a} = (1, 0)$ a směrovým vektorem $\mathbf{v} = (2, -1)$.
3. zeleně jejich řez, což je křivka zadaná parametricky

   $x = 1+2t, \quad y = -t, \quad z = \sin((1+2t)(-t))$

   a červeně bod $(1, 0, f(1, 0))$.



Řez je grafem funkce

$$g : t \mapsto f(1 + 2t, -t) = \sin((1 + 2t)(-t))$$

a vidíte jej na obrázku vlevo. Hodnota parametru $t = 0$ odpovídá bodu $\mathbf{a}$, hodnota $t = 1$ bodu $\mathbf{a} + \mathbf{v}$. Vzdálenost těchto dvou bodů na „trojrozměrném“ grafu funkce f je $\| \mathbf{v} \| = \sqrt{5}$. Tomu jsme přizpůsobili odlišné měřítko na osách (odpovídá volbě stejného měřítka na osách „trojrozměrného“ grafu funkce f).

6. Derivace funkce podle vektoru. *Derivací funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ podle vektoru $\mathbf{v}$ nazýváme limitu, kterou budeme značit $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$*

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}. \tag{1}$$

Výpočet vysvětlíme na příkladu z odstavce 5:

$$f(x, y) = \sin(xy), \quad \mathbf{a} = (1, 0), \quad \mathbf{v} = (2, -1).$$

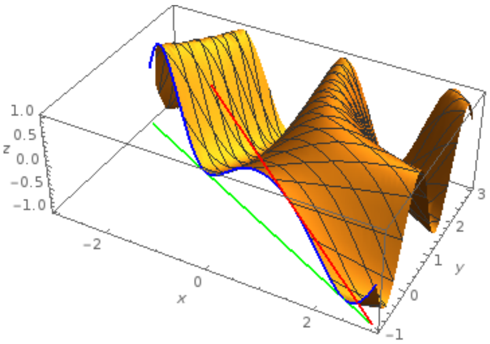
Dosadíme do (1)

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v}) &= f(1 + 2t, -t) = \sin((1 + 2t)(-t)) = -\sin(t + 2t^2) \\ f(\mathbf{a}) &= f(1, 0) = 0 \\ D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) &= \lim_{t \to 0} \frac{-\sin(t + 2t^2) - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t + 2t^2)}{t + 2t^2} \cdot \frac{-(t + 2t^2)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t + 2t^2)}{t + 2t^2} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{-(t + 2t^2)}{t} = -1 \end{aligned}$$

Všimněte si, že pomocí funkce $g : t \mapsto f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v})$ lze (1) zapsat

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

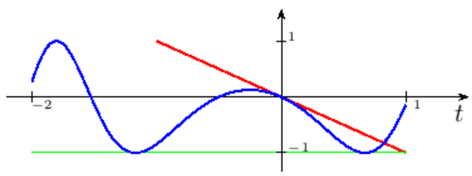
7. Geometrický význam derivace funkce podle vektoru. Vysvětlíme na funkci f z odstavce 5.



Obrázek je vygenerován na wolframalpha.com

Na obrázku je

1. graf funkce f,
2. zeleně přímka určená bodem $\mathbf{a} = (1, 0)$ a směrovým vektorem $\mathbf{v} = (2, -1)$ umístěná do podstavy kvádru,
3. modře graf funkce $g : t \mapsto f(1 + 2t, -t)$,
4. červeně tečna k tomuto grafu v bodě $(1, 0, f(1, 0))$.



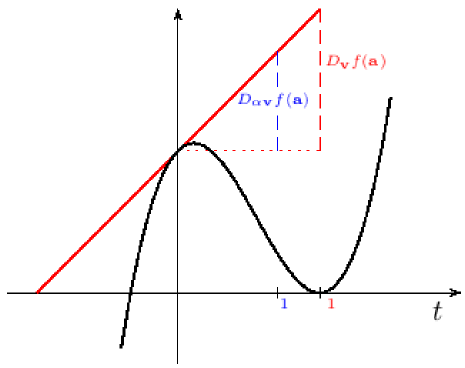
Na dalším obrázku je zobrazen řez s grafem funkce g a oběma přímkami.
Derivace v bodě $\mathbf{a}$ *podle vektoru* $\mathbf{v}$ je rovna velikosti lineární části přírůstku funkce g na jednotkový přírůstek proměnné t: $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \frac{dg}{\Delta t}$.
Přírůstek funkce jedné proměnné a jeho lineární část jsou zopakované v odstavci 13.

8. Derivace funkce podle vektoru je homogenní funkcí vektoru.
Příklad: $f(x, y) = x^3 - xy$, $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 2)$. Dosadíme do (1)

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{a}+t\,\mathbf{v}) &= f(-1+t, 2+2t) = (-1+t)^3 - (-1+t)(2+2t) \\
f(\mathbf{a}) &= f(-1, 2) = 1 \\
D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{(-1+t)^3 - (-1+t)(2+2t) - 1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-1 + 3t - 3t^2 + t^3 - (-2 + 2t^2) - 1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{3t - 5t^2 + t^3}{t} = \lim_{t\to 0} (3 - 5t + t^2) = 3.
\end{aligned}$$

Co se stane, když vektor změníme na jeho násobek $\alpha\mathbf{v}$?. Počítejme

$$\begin{aligned}
D_{\alpha\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{(-1+\alpha t)^3 - (-1+\alpha t)(2+2\alpha t) - 1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-1 + 3\alpha t - 3(\alpha t)^2 + (\alpha t)^3 - (-2 + 2(\alpha t)^2) - 1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{3\alpha t - 5(\alpha t)^2 + (\alpha t)^3}{t} = \lim_{t\to 0} (3\alpha - 5\alpha^2 t + \alpha^3 t^2) = 3\alpha.
\end{aligned}$$



Vztah, který jsme odvodili

$$D_{\alpha\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \alpha D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) \tag{2}$$

platí obecně, jakmile limita napravo existuje. Ilustrujeme ho na obrázku s grafem funkce

$$g : t \mapsto f(\mathbf{a} + t\,\mathbf{v})$$

Červeně je na ose t zobrazena jednotka pro vektor $\mathbf{v}$ a modře pro vektor $\alpha\,\mathbf{v}$ (pro hodnotu $\alpha = 0.7$). V předchozím odstavci jsme odvodili vztah $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \frac{\mathrm{d}g}{\Delta t}$, který můžeme interpretovat: $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \mathrm{d}g$ pro $\Delta t = 1$. Na obrázku jsou tyto přírůstky vyznačeny čárkovaně. Vztah (2) plyne z podobnosti trojúhelníků.

9. Co je to směr vektoru? Geometrický vektor je zadán svojí velikostí, směrem a orientací. Vysvětlete význam slova směr v tomto kontextu. Čím se liší od významu slova směr používaném v běžné řeči?

10. Derivace ve směru (směrová derivace) – terminologický zmatek. Derivace funkce více proměnných v bodě $\mathbf{a}$ ve směru vektoru $\mathbf{v}$ se v literatuře někdy definuje tak, jak jsme definovali derivaci podle vektoru $\mathbf{v}$. Vztah (2) ale mimo jiné říká, že hodnota derivace podle vektoru závisí na jeho velikosti. Proto se někdy derivace ve směru definuje pro jednotkový vektor (tj. vektor o velikosti jedna). I tady zůstává nejednoznačnost. K nenulovému vektoru $\mathbf{v}$ jsou dva jednotkové vektory stejného směru, a to $\mathbf{v}\,/\|\,\mathbf{v}\,\|$ a $-\,\mathbf{v}\,/\|\,\mathbf{v}\,\|$ a derivace podle nich se tedy liší, je-li nenulová, znaménkem.

11. Gradient. Má-li funkce dvou proměnných $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ derivace prvního řádu podle obou proměnných $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, pak vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ nazýváme gradientem funkce f a značíme ho $\operatorname{grad} f$, případně ∇f.
Příklad: pro $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - x \sin y}$ je

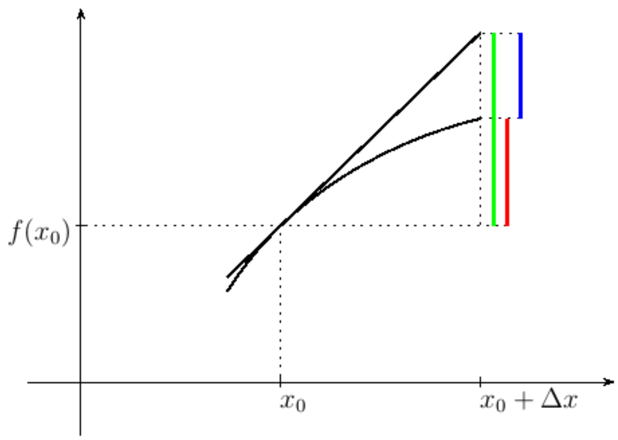
$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{2x - \sin y}{2\sqrt{x^2 - x \sin y}}, \frac{-x \cos y}{2\sqrt{x^2 - x \sin y}} \right).$$

Gradient funkce f v bodě $\mathbf{a}$ značíme $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$. Ve výše uvedeném případě je pro $\mathbf{a} = (2, \pi/6)$

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \left(\frac{7}{4\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \right).$$

12. Věta o derivaci podle vektoru a gradientu. TODO

13. Funkce jedné proměnné, přírůstek funkce, derivace a aproximace lineární funkcí.



Na obrázku je červeně vyznačen *přírůstek funkce* $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,

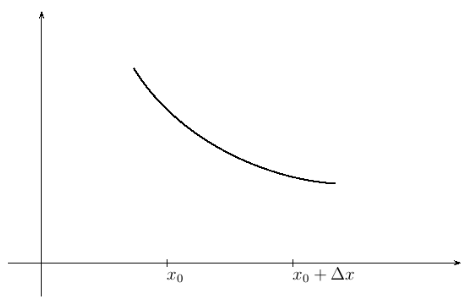
zeleně jeho *lineární část* $f'(x_0)\Delta x$, budeme ji značit $\mathrm{d}f$,

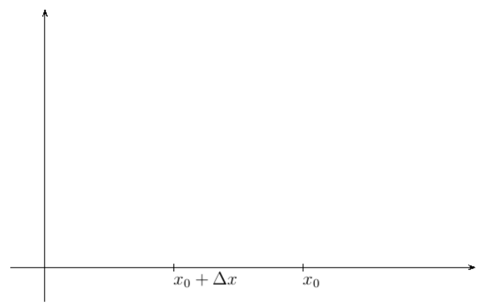
modře jejich rozdíl $\mathrm{d}f - \Delta f$.

Přírůstek proměnné x jsme označili Δx.

Místo Δx mnohdy píšeme $\mathrm{d}x$ (jsou to přírůstky identity $\mathrm{id} : x \mapsto x$).

Jak přírůstek funkce Δf, tak přírůstek Δx může být záporný, jak ilustrují další obrázky.





Připomeňte si příklad 5.2.10 a poznámku 5.2.11 v [1]. Kromě dalšího říká

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\Delta x} = 0,$$

což interpretujeme: pro malý přírůstek proměnné Δx je chyba, které se dopustíme záměnou přírůstku funkce Δf za linearizovaný přírůstek $\mathrm{d}f$, zanedbatelná vzhledem k Δx.

Poznámka ke geometrickému významu derivace: číslo $f'(x_0)$ je rovno podílu $\frac{\mathrm{d}f}{\Delta x}$ a má význam hodnoty linearizovaného přírůstku na jednotkový přírůstek proměnné x: pro $\Delta x = 1$ je $f'(x_0) = \mathrm{d}f$. Přímku o rovnici $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ nazýváme tečnou ke grafu funkce f, její směrnice je rovna $f'(x_0)$ a v případě stejných měřítek na osách x, y je směrnice rovna tangensu úhlu, který tečna svírá s kladnou poloosou x.

14. Úkoly.

1. Vysvětlete, jak souvisí parametrické rovnice přímky s operacemi násobení vektoru číslem a sčítání vektorů.

2. Nakreslete definiční obor a izokřivky funkce $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - x + y^2}$. Nevíte-li si rady s obecnou izokřivkou, pracujte nejdříve s izokřivkami o rovnicích $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 1$ a teprve potom přejděte k obecnému případu $f(x, y) = c$.

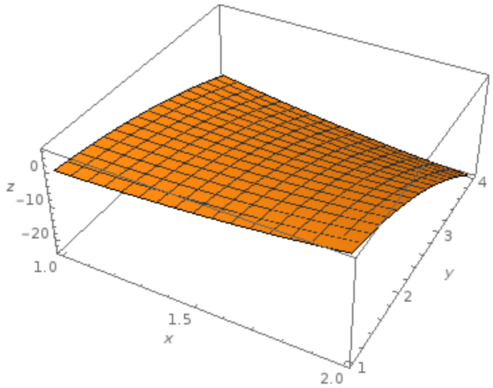
   Vypočtěte parciální derivace a gradient funkce f v bodě $\mathbf{a} = (1, 2)$.

   Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $\mathbf{a}$ podle vektoru $\mathbf{v} = (3, -1)$

   (a) přímo z definice

   (b) použitím gradientu

3. Na obrázku je graf funkce $f : (x, y) \mapsto x^3 - xy^2$ na intervalu $[1, 2] \times [1, 4]$.



Obrázek je vygenerován na wolframalpha.com

   (a) Na přední stěně je graf funkce jedné proměnné. Napište její předpis. Totéž pro pravou boční stěnu.

   (b) Určete z výše uvedeného grafu znaménka parciálních derivací funkce f v bodě $\mathbf{a} = (2, 1)$ a odhadněte jejich hodnotu. Svůj odhad zkontrolujte výpočtem. Napište rovnici tečny k řezu grafu funkce f čelní stěnou v bodě $[2, 1, f(2, 1)]$. Totéž pro stejný bod a boční stěnu.

   (c) Napište rovnici roviny určené tečnami z předchozího příkladu.

Reference

[1] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf`.

[2] Ilja Černý. Inteligentní kalkulus 2.
`https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/IK2.pdf`.