Spojitost a limita funkcí více proměnných

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
16. května 2019

1. Euklidovská vzdálenost v $\mathbb{R}^d$
Značení: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$.

Definice. Číslo $(\sum_{k=1}^{d}(x_k - y_k)^2)^{1/2}$ nazýváme euklidovskou vzdáleností bodů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ v $\mathbb{R}^d$. Značit ji budeme $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, pokud bude užitečné vyznačit dimenzi d, tak $\varrho_d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Vlastnosti.

1. Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ platí $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, přitom rovnost nastává právě když je $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Vlastnost nazýváme *pozitivitou.*

2. Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ platí $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varrho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Vlastnost nazýváme *symetrií.*

3. Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ platí $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varrho(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Vlastnost nazýváme *trojúhelníkovou nerovností.*

4. Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, $k = 1, \dots, d$ platí $|x_k - y_k| \leq \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
   Volně řečené tato vlastnost znamená, že souřadnice „blízkých“ bodů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ se liší „málo“.

5. Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ platí $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k|$.
   Vlastnost znamená, že body $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ s „málo“ se lišícími souřadnicemi jsou si „blízké“.

Důkaz. 1,2,4 je zřejmé, 3 plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro euklidovskou normu $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \|$ (dosaďte $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$), 5 plyne trojúhelníkové nerovnosti pro body $\mathbf{x}$, $(y_1, x_2 \dots, x_d)$, $(y_1, y_2, x_3 \dots, x_d)$, $\dots$, $\mathbf{y}$.

2. Definice spojitosti zobrazení f z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^n$.

Řekneme, že zobrazení je f spojité v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d)(\varrho_d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow \varrho_n(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a})) < \varepsilon)$$

Poznámka. Pro $d = n = 1$ je $\varrho_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = |x_1 - a_1|$, $\varrho_1(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a})) = |f(x_1) - f(a_1)|$ a definice je tedy totožná s dříve uvedenou definicí spojitosti funkce jedné proměnné.

Značení. $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, proto napíšeme f pomocí funkcí f_k z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$ následovně $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$.

Z vlastnosti 4 plyne $|f_k(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{a})| \leq \varrho_n(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a}))$. A proto ze spojitosti funkce f plyne spojitost jejích složek f_k.

Z vlastnosti 5 plyne $\varrho_n(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a})) \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{a})|$. A proto ze spojitosti složek f_k plyne spojitost funkce f.

Závěr. Funkce $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ je spojitá v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ právě když jsou v bodě $\mathbf{a}$ spojité všechny její složky $f_1, \dots, f_n$.

Důsledek. Stačí se naučit vyšetřovat spojitost a limity funkcí z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$. My se omezíme na funkce dvou proměnných, tedy případ $d = 2$.

3. Definice limity zobrazení f z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^n$.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ má v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ limitu rovnu $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n$, pokud platí

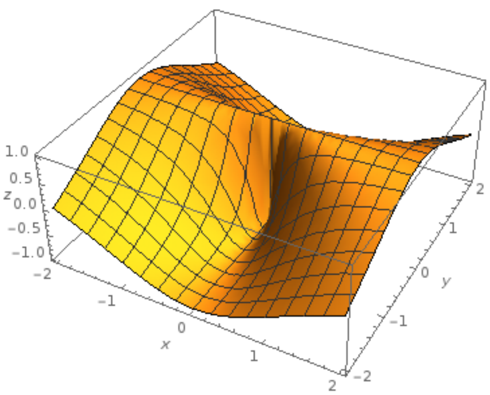
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d)(0 < \varrho_d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow \varrho_n(f(\mathbf{x}), \mathbf{L}) < \varepsilon)$$

Poznámky.

1. Podobně jako u spojitosti je pro $d = n = 1$ definice limity totožná s dříve uvedenou definicí: $\varrho_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = |x_1 - a_1|$, $\varrho_1(f(\mathbf{x}), \mathbf{L}) = |f(x_1) - L_1|$.

2. Podobně jako u spojitosti je $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$ ekvivalentní limitám po složkách $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_k(\mathbf{x}) = L_k$ pro $k = 1, \ldots, n$.

4. Spojité rozšíření. Uvedeme několik příkladů.



Obrázek je vygenerován na wolframalpha.com

Na obrázku je graf funkce

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$$

Všimněte si, že rovina $y = 0$ protíná graf v přímce $z = 1$ a že totéž zjistíte dosazením do funkčního předpisu. Podobně rovina $x = 0$ protíná graf v přímce $z = -1$.
Odtud plyne, že v libovolném okolí bodu $(0, 0)$ nabývá funkce hodnot 1 i -1 a není ji tedy možné do tohoto bodu spojitě rozšířit.

Prozkoumejme možnost spojitého rozšíření funkce

$$f : (x, y) \mapsto xy/(x^2 + y^2)$$

Spočítejme hodnoty na souřadných osách $f(x, 0) = 0$, $f(0, y) = 0$. Odtud by se mohlo zdát, že je možné funkci f rozšířit spojitě hodnotou nula do bodu $(0, 0)$. Spočítejme ještě hodnoty na přímce $y = x$: $f(x, x) = x^2/(2x^2) = 1/2$. Odtud vidíme, že výše uvedené rozšíření není spojité. Závěrem konstatujme, že ani funkce f nemá spojité rozšíření do bodu $(0, 0)$.

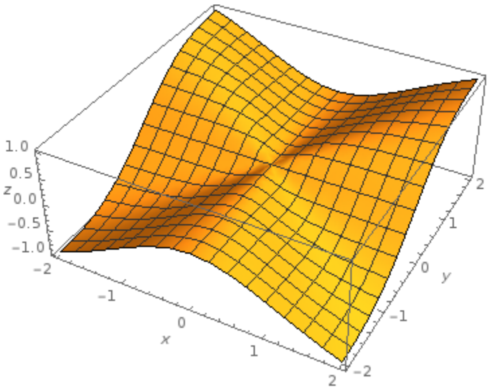
Dalšími příklady jsou funkce

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad f_2(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Spočítáme postupně hodnoty a limity po všech přímkách procházejících bodem $(0, 0)$

$$\begin{array}{lll}
x = 0: & f_1(0, y) = 0 & \lim_{y\to 0} f_1(0, y) = 0 \\[2ex]
y = kx: & f_1(x, kx) = \frac{kx^3}{x^2 + (kx)^2} = \frac{kx}{1 + k^2} & \lim_{x\to 0} f_1(x, kx) = 0 \\[2ex]
x = 0: & f_2(0, y) = 0 & \lim_{y\to 0} f_1(0, y) = 0 \\[2ex]
y = kx: & f_2(x, kx) = \frac{kx^3}{x^4 + (kx)^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} & \lim_{x\to 0} f_1(x, kx) = 0
\end{array}$$

Z výpočtů to vypadá, že by obě funkce mohly mít spojité rozšíření hodnotou nula do bodu $(0,0)$.



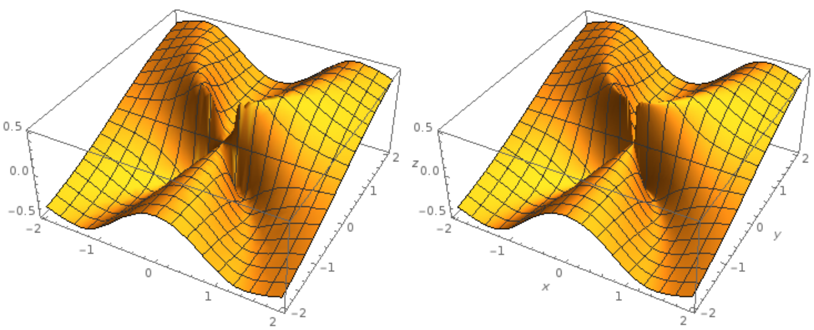
Obrázek je vygenerován na wolframalpha.com

Vlevo je graf funkce f_1 a podporuje naši hypotézu o spojitém rozšíření. Pro definitivní potvrzení naší hypotézy upravíme funkční hodnotu do tvaru

$$f_1(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,y$$

a použijeme větu, kterou známe pro funkci jedné proměnné a která platí i pro funkce více proměnných: součin funkcí, z nichž je jedna omezená a druhá má nulovou limitu, má také nulovou limitu.

Podívejme se na graf funkce f_2. U grafu vpravo je nastavena větší hustota bodů, ve kterých je počítána funkční hodnota, a proto je v okolí bodu, kde se funkční hodnota rychle mění, přesnější.



Obrázky jsou vygenerovány na wolframalpha.com

Na grafech jsou patrné dvě paraboly o rovnicích $y = \pm x^2$, na nichž má funkce hodnotu $f_2(x,x^2) = 1/2$, $f_2(x,-x^2) = -1/2$. Odtud plyne, že funkci není možné spojitě rozšířit do bodu $(0,0)$.