Funkce více proměnných

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
17. října 2017

1. Zobrazení $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, jejich geometrický, případně fyzikální či jiný, význam a jejich grafické znázornění.

1. $d = n = 1$ funkce jedné proměnné (AN1E)
2. $d = 1$, $n \in \{2, 3\}$ křivka (nebo oblouk křivky) v rovině nebo v prostoru popsaná parametricky

   Příklady: přímka, úsečka, kružnice.
3. $d = 2$, $n = 1$ grafem je plocha; v rovině ji lze znázornit vrstevnicemi (křivky spojující body se stejnou funkční hodnotou, někdy je nazýváme hladinami, izočárami, v konkrétních případech izotermami, izobarami ...) nebo barevně. Jako příklad uveďme barevné znázornění nadmořské výšky na školních mapách a mapy na `www.in-pocasi.cz/model`.
4. $d = 3$, $n = 1$ lze ji znázornit soustavou hladin (plochy spojující body se stejnou funkční hodnotou) nebo na řezech barevně či vrstevnicemi. Pro obrázek například googlete CT slice.
5. $d = n = 2$

   Aktivní pojetí: deformace v rovině, například bod (x, y) má po otočení o úhel α okolo počátku proti směru hodinových ručiček souřadnice $(x', y') = (x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \cos\alpha)$; po smykové deformaci má souřadnice $(x', y') = (x + 0.1y, y)$.

   Pasivní pojetí: změna souřadnic v rovině; například při otočení os o úhel α proti směru hodinových ručiček se souřadnice bodu (x, y) změní na $(x', y') = (x \cos\alpha + y \sin\alpha, -x \sin\alpha + y \cos\alpha)$; bod o souřadnicích (x, y) popíšeme polárními souřadnicemi (r, φ), vztah mezi souřadnicemi je $x = r \cos\varphi, y = r \sin\varphi$.

   Tok v rovině: například rychlost proudění $(v_x, v_y) = (-y, x)$ v bodě (x, y) popisuje vír. Můžete vymyslet další fyzikální příklady, třeba magnetické pole okolo magnetu vymodelované železnými pilinami.

   (Podrobněji bude později) gradinet funkce f, tedy funkce $(x, y) \mapsto (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$ popisuje normály k izokřivkám funkce $(x, y) \mapsto f(x, y)$.
6. $d = 2$, $n = 3$ plocha v 3D prostoru popsaná parametricky

   Příklady:

   Sféra o poloměru R: $(s, d) \mapsto (x, y, z) = (R \cos s \cos d, R \cos s \sin d, R \sin s)$.

   Sedlová plocha: $(x, y) \mapsto (x, y, xy)$.

   Stejná sedlová plocha, ale jinak natočená vzhledem k souřadným osám a v jiném měřítku: $(x, y) \mapsto (x, y, x^2 - y^2)$.

   Vykreslení na [1], plot3d[xˆ2-yˆ2].

2. Úkoly.

1. Napište parametrické rovnice přímek AB, CD, polopřímek AB, CD a úseček AB, CD.
$$A = [2, -1], \quad B = [3, 1], \qquad C = [1, 0, 3], \quad D = [2, -1, 0]$$

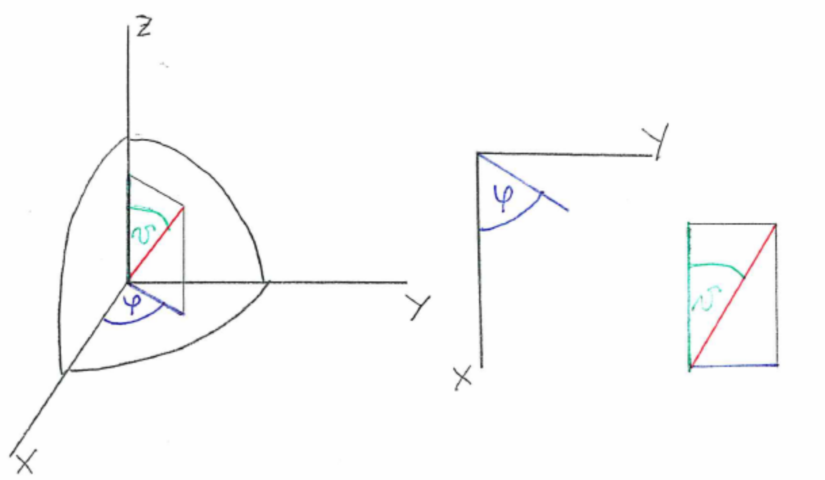
2. Napište parametrické rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem 3. Jako parametr zvolte úhel, který svírá průvodič bodu s kladnou poloosou x.

3. Napište parametrické rovnice kružnice se středem v bodě $[-1, 2]$ a poloměrem 1. Jako parametr zvolte vhodný úhel, podobně jako v příkladu 2.

4. Načrtněte hladiny funkce $(x, y) \mapsto xy$, tedy křivky o rovnici $xy =$ konstanta.

5. Odvoďte (z obrázku) vztahy mezi kartézskými a polárními souřadnicemi
$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.
Odvoďte inverzní vztahy: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = ?$ ($\operatorname{tg}\varphi = y/x$).

6. Odvoďte (z obrázku) vztahy mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi
$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$
a inverzní vztahy: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\cos\vartheta = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = y/x$.



7. Ze vztahů $\cos\vartheta = \sqrt{x^2 + y^2}/z$, $\operatorname{tg}\varphi = y/x$ odvoďte vztahy $\vartheta =?$, $\varphi =?$.

8. Do pravých stran vztahů $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\cos\vartheta = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{x^2 + y^2}/z$, $\operatorname{tg}\varphi = y/x$ dosaďte $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ a úpravou ověřte jejich platnost.

9. Zkoumejte plochu zadanou parametricky (Möbiův list, [2], příklad 15.5, str. 119). Jaké křivce odpovídá $u = 0$, $v \in [0, 2\pi]$? Jakým $u = 1$ a $u = -1$?
$$(\cos v(1 + u\cos\tfrac{1}{2}v), \sin v(1 + u\cos\tfrac{1}{2}v), u\sin\tfrac{1}{2}v)$$

Reference

[1] `https://www.wolframalpha.com`.

[2] Ilja Černý. Úvod do inteligentního kalkulu 2.
`https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/IK2.pdf`.