Požadavky ke zkoušce z AN3E

14. ledna 2020

- **Posloupnosti a řady funkcí.** Bodová konvergence posloupnosti funkcí, příklad posloupnosti spojitých funkcí s nespojitou limitou. Souvislost nespojitosti limity spojitých funkcí s prohozením pořadí limit ve dvojné limitě. Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí, definice a vysvětlení na grafu. Věta o spojitosti limity stejnoměrně konvergentní posloupnosti spojitých funkcí a hlavní myšlenka důkazu.

- **Mocninné řady.** Věta o poloměru konvergence mocninné řady i s důkazem, odvození vzorce pro poloměr konvergence z limitního podílového kritéria. Věta o spojitosti součtu mocninné řady na kruhu konvergence (ve vnitřních bodech) i s důkazem.

- **Derivování mocninné řady člen po členu.** Derivování řady člen po členu; jak souvisí s výměnou pořadí limit ve dvojné limitě a proč nelze použít pravidlo o derivaci součtu. Věta o poloměru konvergence mocninné řady zderivované člen po členu (důkaz pro případ vzorce pro poloměr konvergence a v obecném případě důkaz jen jedné z nerovností mezi poloměry konvergence). Důsledek: Taylorova řada součtu mocninné řady je rovna této mocninné řadě (i s důkazem). Příklad funkce, jejíž Taylorova řada není rovna této funkci.

- **Limity funkcí více proměnných.** Jak sopuvisí limity po přímkách s dvojnou limitou. Příklad funkce, která má stejné limity po všech přímkách, ale nemá dvojnou limitu. Počítání limit funkce po složkách (i s důkazem – použití nerovností $|h_1| \le \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, $|h_2| \le \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, $\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \le |h_1| + |h_2|$, tedy vektor (h_1, h_2) je „blízký“ nulovému vektoru právě když jsou jeho složky „blízké“ nule).

- **Derivace funkcí více proměnných.** Parciální funkce a parciální derivace, jak se znázorní na grafu funkce. Derivace podle vektoru, její geometrický význam (jak souvisí s přírůstky). Derivace podle vektorů $(1, 0)$, $(0, 1)$ (jsou rovny parciálním derivacím). Proč je derivace podle násobku vektoru násobkem derivace podle vektoru. Jak souvisí druhá vlastnost linearity – tedy derivace podle součtu vektorů je rovna součtu derivací podle jednotlivých vektorů – s tečnou rovinou a jak je tuto vlastnost možné vysvětlit na papírovém modelu. Slabá derivace, silná derivace, gradient, vyjádření slabé a silné derivace pomocí gradientu. Souvislost silné derivace s rovnicí tečné roviny. Věta o existenci silné derivace i s důkazem. Věta o spojitosti a silné derivaci i s důkazem; příklad nespojité funkce mající slabou derivaci. Taylorův polynom prvního stupně a věta o derivaci složené funkce (pro vnitřní funkci z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^d$ a vnější funkci z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$). Věta o rovnosti smíšených derivací (jen formulace, bez důkazu), příklad nerovnosti smíšených derivací.

- **Extrémy.** Lokální extrémy a vázané extrémy. Stacionární body, typy stacionárních bodů, Taylorův polynom druhého stupně, souvislosti. Metoda Lagrangeových multiplikátorů (jen pro případ jednoho multiplikátoru), geometrický význam (jak najdete na mapě s vrstevnicmi nejvyšší místo na cestě, které vektory mají něco společného a co).

- **Integrály.** Definice dvojného integrálu (v Riemannově smyslu), Fubiniova věta. Jakobián, substituce ve dvojném integrálu pro polární souřednice, web thetruesize. Výpočet objemu Vivianiho tělesa. Výpočet integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

- **Metrické prostory.** Co je metrický prostor, příklady metrických prostorů odvozených od norem (na vektorových prostorech), důkaz, že takto odvozená metrika splňuje axiomy metrického prostoru. Jak vypadají kružnice v těchto metrických prostorech. Okolí bodu, vnitřní, vnější, hraniční, hromadné, limitní a izolované body množiny. Vnitřek, hranice a uzávěr množiny. Otevřené, uzavřené množiny. Omezená množina, věta o existenci extrémů spojité funkce více proměnných na uzavřené omezené množině (vícerozměrná varianta Weierstrassovy věty), její použití při hledání extrémů. Definice úplného metrického prostoru, příklad úplného metrického prostoru (reálná čísla) a neúplného metrického prostoru (racionální čísla).