Příklady do písemné zkoušky z AN3E

7. ledna 2020

1. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada a pro která konverguje absolutně.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^k(k+1)}(x+1)^k$$

1a. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada a pro která konverguje absolutně.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} x^k$$

2. Vyjádřete funkci f jako součet mocninné řady se středem v bodě $a = 0$ a určete poloměr konvergence této řady.

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{x^2+x-6}$$

3. Vypočtěte limity funkce f v bodě $\mathbf{a} = (0, 0)$ po všech přímkách. Co lze z výsledků usoudit o existenci limity funkce f v bodě $\mathbf{a}$?

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$$

4. Určete definiční obor následujících funkcí a zjistěte, zda je možné je spojitě rozšířit.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$g : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

4a. Určete definiční obor následující funkce a zjistěte, zda je možné ji spojitě rozšířit.

$$f : (x, y) \mapsto \left(\frac{x^2 y}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right)$$

5. Vypočtěte derivaci podle vektoru $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ funkce f v bodě $\mathbf{a} = (0, 0)$. Určete, zda má funkce f v bodě $\mathbf{a}$ slabou derivaci.

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy+2xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5a. Vypočtěte derivaci podle vektoru $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ funkce f v bodě $\mathbf{a} = (1, 0)$. Určete, zda má funkce f v bodě $\mathbf{a}$ slabou derivaci.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

6. Ukažte, že funkce f má v bodě $\mathbf{a} = (1, 0)$ slabou derivaci a vypočtěte ji.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

7. Vypočtěte silnou derivaci funkce f v bodě $\mathbf{a} = (-2, 1)$.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

8. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $\mathbf{a} = (-2, 1)$.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy + 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

9. Určete obě smíšené derivace druhého řádu funkce f v bodě $\mathbf{a} = (2, 1)$

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2y^2}{x + y}$$

10. Nalezněte stacionární body funkce f a určete jejich typ.

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + xy^2 + 2xy + 2y^3$$

11. Jaké nejmenší a největší hodnoty nabývá funkce f na trojúhelníku o vrcholech v bodech A, B, C? Pod trojúhelníkem máme na mysli obrazec – tedy nejen body na jeho obvodu, ale i uvnitř.

$$A = [0, 0], B = [3, 0], C = [0, 3], \quad f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 5x - 9y$$

12. Jaké nejmenší a největší hodnoty nabývá funkce f na elipse o vrcholech v bodech A, B, C, D? Pod elipsou máme na mysli obrazec – tedy nejen křivku, ale i body uvnitř.
Zakreslete elipsu i body, v nichž funkce nabývá extrému a jejich polohu zkontrolujte úvahou.

$$A = [-1, 0], B = [0, -2], C = [1, 0], D = [0, 2] \qquad f(x, y) = x - y$$

13. Jaké nejmenší a největší hodnoty nabývá funkce f na elipse o vrcholech v bodech A, B, C, D? Pod elipsou máme na mysli obrazec – tedy nejen křivku, ale i body uvnitř.
Zakreslete elipsu i body, v nichž funkce nabývá extrému a jejich polohu zkontrolujte úvahou.

$$A = [-1, 0], B = [0, -2], C = [1, 0], D = [0, 2] \qquad f(x, y) = xy$$

14. Pro množinu M určete řezy rovnoběžné se souřadnými osami.

$$M = \{[x, y] : y \leq x(2 - x), x \leq y + 2\}$$

15. Načrtněte obrazec M a vypočtěte souřadnice jeho těžiště.

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$$

16. Načrtněte obrazec M a vypočtěte souřadnice jeho těžiště.

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

17. Vypočtěte dvojný integrál funkce f přes množinu M.

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$