

Úlohy na derivace funkcí více proměnných

1. Ukažte, že funkce f má v počátku slabou derivaci a určete ji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. Vypočtěte derivaci složené funkce, která parametru $t \in \mathbb{R}$ přiřadí bod $(x, y) = (\cos t + \frac{1}{2} \sin t, \cos t - \frac{1}{2} \sin t)$ a bodu (x, y) přiřadí jeho vzdálenost od počátku. Derivaci vypočtěte dvojím způsobem: jednak dosazením vnitřní funkce do vnější a zderivováním podle t a druhak dosazením do vzorce

$$f'(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

Výsledky upravte a ukažte, že se rovnají.

3. Derivaci složené funkce z předchozího příkladu položte rovnu nule a rovnicí vyřešte. Vysvětlete geometrický význam výpočtu.
4. Vypočtěte smíšené derivace druhého řádu funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a ukažte, že mimo počátek se rovnají, ale v počátku nikoliv.