

Úlohy na dvojné integrály

1. Načrtněte trojúhelník o vrcholech $A = [0, 0]$, $B = [3, 1]$, $C = [2, 2]$. Do obrázku zakreslete přímky o rovnicích $y = 1/2$, $x = 1$, $x = 5/2$ a vyjádřete řezy $M_{*,1/2}$, $M_{1,*}$, $M_{5/2,*}$ ve tvaru intervalů. M zde označuje trojúhelník jako obrazec, tedy i s vnitřními body. Jak by vypadaly řezy, kdyby M byl jen obvod trojúhelníku?
2. Napište rovnice stran trojúhelníku z předchozího příkladu a popište řezy pro obecné x , y .
3. Vypočtěte obsah a polohu těžiště trojúhelníku o vrcholech $[0, 0]$, $[1, 1]$, $[0, 2]$ pomocí dvojného integrálu a výpočet zkontrolujte výpočtem prostředky elementární geometrie.
4. Načrtněte obrazec M a vypočtěte dvojný integrál $\iint_M x^2 dx dy$

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \leq y \leq x + 3\}$$

- *5. Obrazec O leží v rovině o rovnici $z = ax + by + c$. Odvoďte prostředky středoškolské geometrie podíl obsahů obrazce a jeho kolmého průmětu do roviny xy a výsledek použijte k odvození vorce pro obsah zakřivené plochy.
6. Vypočtěte Jakobián přechodu od kartézských k polárním souřadnicím.
7. Dokončete výpočet objemu Vivianiho tělesa.
8. Vypočtěte v kartézských i polárních souřadnicích dvojný integrál

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dx dy$$

a odtud vypočtěte hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$.