

Úlohy na funkce více proměnných

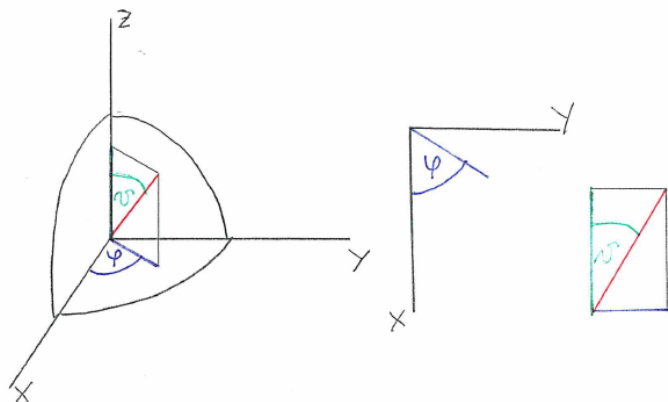
1. Určete definiční obory následujících funkcí a zjistěte, zda je možné je spojitě rozšířit.

(a) $(x, y) \mapsto \left(\frac{y(x+1)}{(x+1)^2+y^2}, \frac{xy^2}{x^2+2y^2} \right)$

(b) $(x, y) \mapsto \left(\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3}{(x^2+y^2)} \right)$

2. Napište parametrické rovnice úsečky AB , přímky AB a polopřímky AB pro $A = [-1, 2]$, $B = [3, -5]$.
3. Napište parametrické rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem $r = 3$. Jako parametr zvolte úhel, který svírá průvodič bodu s kladnou poloosou x .
4. Napište parametrické rovnice kružnice se středem v bodě $[-1, 2]$ a poloměrem $r = 1$. Jako parametr zvolte vhodný úhel, podobně jako v příkladu 3.
5. Na parametrické rovnice kružnic z příkladů 3, 4 se lze dívat jako na zobrazení, která hodnotě parametru přiřadí bod v rovině. Vypočtěte derivace těchto zobrazení a uveďte jejich geometrický význam.
6. Načrtněte hladiny funkce $(x, y) \mapsto xy$, tedy křivky o rovnici $xy = \text{konstanta}$.
7. Vypočtěte gradient funkce z příkladu 6 a uveďte jeho geometrický význam.
8. Odvoďte (z obrázku) vztahy mezi kartézskými a polárními souřadnicemi $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.
- *9. Odvoďte inverzní vztahy: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = ?$.
10. Vypočtěte gradient zobrazení $(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ a uveďte jeho geometrický význam.
11. Vypočtěte gradient zobrazení $(x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg(y/x))$ a uveďte jeho geometrický význam.

12. Odvoďte (z obrázku) vztahy mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi
 $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \vartheta$



- *13. Ze vztahů $\cos \vartheta = \sqrt{x^2 + y^2}/z$, $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ odvoďte vztahy $\vartheta = ?$, $\varphi = ?$.
- *14. Do pravých stran vztahů $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\cos \vartheta = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{x^2 + y^2}/z$, $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ dosadte $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \vartheta$ a úpravou ověřte jejich platnost.
- *15. Zkoumejte plochu zadanou parametricky (Möbiův list, [1], příklad 15.5, str. 119). Jaké křivce odpovídá $u = 0$, $v \in [0, 2\pi]$? Jakým $u = 1$ a $u = -1$?

$$\left(\cos v(1 + u \cos \frac{1}{2}v), \sin v(1 + u \cos \frac{1}{2}v), u \sin \frac{1}{2}v \right)$$

Reference

- [1] Ilja Černý. Inteligentní kalkulus 2.
<https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/IK2.pdf>.