

## K úloze na spojitost a derivace

Ukázalo se, že následující úloha dělá studentům problémy. Proto jsem k ní vytvořila dílčí úlohy a dále jsem doplnila do zadání funkční hodnotu v bodě  $\mathbf{b} = (-1, 0)$  (bez které úloha postrádá smysl).

1. Nechte [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com) vykreslit následující funkce a odhadněte, zda mají v bodech  $\mathbf{a} = (0, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 0)$  slabou derivaci a zda mají silnou derivaci. Vyberte tu funkci, u níž předpokládáte existenci silné derivace a tuto silnou derivaci vypočítejte (součástí výpočtu je i důkaz, že je opravdu silnou derivací). Funkce jsou v bodě  $\mathbf{b}$  rozšířeny nulou (tj. funkční hodnota v bodě  $\mathbf{b}$  je rovna nule).

$$(a) f : (x, y) \mapsto \frac{(x^2-1)y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$(b) g : (x, y) \mapsto \frac{(x^2-1)y^2}{(x+1)^2+y^2}$$

$$(c) h : (x, y) \mapsto \frac{(x^2-1)y^3}{(x+1)^2+y^2}$$

Dílčí úlohy.

1. Napište rovnice přímků procházejících bodem  $\mathbf{b} = (-1, 0)$ . Buď zvolte konkrétní přímky (doporučuji souřadné osy, případně rovnoběžky s nimi a dále přímky, které svírají s osami 45 stupňů), nebo napište rovnici obecné přímky.
2. Dosad'te rovnici přímky do funkčního předpisu a spočítejte limitu v bodě  $\mathbf{b}$ . Vidíte výsledek vašeho výpočtu na grafu funkce? Co lze ze spočítaných limit usoudit o dvojně limitě? O její existenci a hodnotě?
3. Co lze ze spočítaných limit usoudit o existenci silné a slabé derivace?
4. Připomeňte si funkce  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$  a jejich grafy. Má některá z nich limitu v bodě nula?