Řady funkcí – doplněk

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
16. října 2019

Na přednášce dne 9. října 2019 jsem vynechala pár podrobností k důkazu o spojitosti mocninné řady na kruhu konvergence. Odpřednáším je další týden a abych zmenšila studentům takto vzniklý zmatek v poznámkách, rozdám jim následující text.

Na přednášce jsme konstatovali, že pro konvergentní řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se součet členů za n-tým členem, tedy $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ blíží k nule pro $n \to \infty$. Jinak zapsáno $s - s_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Odtud jsme pak pro kladné r menší než poloměr konvergence odvodili $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k < \varepsilon$. Přitom tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$ a k tomuto ε dostatečně velké n.

Za zmínku možná stojí, že podmínka $a_n \to 0$ pro $n \to \infty$ je nutná podmínka pro konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, zatímco podmínka $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0$ pro $n \to \infty$ je podmínkou nutnou a postačující.

Nyní k dopnění důkazu. Potřebujeme ukázat, že $s - s_n$ lze volbou dostatečně velkého n udělat libovolně malé nezávisle na x. Přitom „libovolně malé“ měříme malým ε a znamená to $|s - s_n| < \varepsilon$.

Upravíme výraz $|s_m - s_n|$ a pak uděláme limitní přechod $m \to \infty$. K úpravě výrazu použijeme trojúhelníkovou nerovnost

$$|s_m(x) - s_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k (x - x_0)^k| \le \sum_{k=n+1}^{m} |a_k (x - x_0)^k|$$

odtud pro $|x - x_0| < r$ plyne

$$|s_m(x) - s_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| r^k$$

Limitním přechodem pro $m \to \infty$ dostaneme

$$|s(x) - s_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k$$

Volbou dostatečně velkého n můžeme udělat pravou stranu libovolně malou (tj. libovolně blízkou nule) nezávisle na x. Odtud plyne

$$s_n \rightrightarrows s \text{ na } I = [x_0 - r, x_0 + r]$$

a odtud spojitost s na I.

Ještě vysvětlím, proč jsem tuto část na přednášce přeskočila. Měla jsem to rozmyšlené, věděla jsem, že musím začít rozdílem $s_m - s_n$ a pak udělat limitní přechod pro $m \to \infty$. Pak mně bliklo hlavou, že dokazuji stejnoměrnou konvergenci, ze které plyne spojitost a začala jsem pochybovat, že je možné limitní přechod udělat. Spletla jsem si $m \to \infty$ s $x \to x_0$ (k $s(x) \to s(x_0)$ potřebujeme spojitost s a tu jsme dokazovali).