Úlohy na řady funkcí

1. Odvoďte vzorce pro součet konečné a nekonečné geometrické řady.

2. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ má řada součet a pro která $x \in \mathbb{R}$ je konvergentní.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k2^k}$$

3. Sečtěte řadu
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{2^k}$$
Návod: ukažte, že řada je geometrická a použijte vzorec odvozený v 1.

4. Na přednášce ukážeme, že pro řady v příkladech 2, 3 platí věta o derivaci součtu i pro nekonečný počet sčítanců. Použijte tuto větu na uvedené řady.

5. Ukažte, že posloupnost $\left\{(\sin x)^{2k}\right\}_{k=0}^{\infty}$ je pro $x \in \mathbb{R}$ geometrická a vypočtěte její kvocient.

6. Načrtněte grafy několika členů posloupnosti z příkladu 5 a graf její limity.

7. Použijte příklad 4 k sečtení řady z úlohy 2.

*8. V příkladu 2 jste použili limitní podílové kritérium konvergence řad. Zopakujte si hlavní myšlenky jeho důkazu:

   (a) Předpokládejte, že pro členy řady $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ platí
   $$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0.9.$$
   Srovnáním s geometrickou řadou $\sum_{k=N}^{+\infty} |a_N| 0.95^{k-N}$ pro vhodné N ukažte, že řada absolutně konverguje.

   (b) Předpokládejte, že pro členy řady $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ platí
   $$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1.$$
   Ukažte, že řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Co odtud plyne?

*9. V předmětu Diskrétní matematika budete probírat *vytvořující funkce*. Řadu

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$$

budete nazývat *vytvořující funkcí* posloupnosti $\{k\}_{k=0}^{\infty}$ v *otevřeném tvaru*. Součet této řady pak budete nazývat *uzavřeným tvarem* této vytvořující funkce. Vypočtěte tento součet.