Úlohy na řady funkcí III

1. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje nebo dokonce absolutně konverguje řada

   (a) $\sum \frac{x^k}{(2k)!}$

   (b) $\sum (2k+1)! x^k$

   (c) pro $r \in \mathbb{R}$, $r \in (0, +\infty)$: $\sum \frac{x^k}{r^k}$

   (d) $\sum (-1)^k x^k$

   (e) $\sum \frac{x^k}{\sqrt{2k+1}}$

   (f) $\sum \frac{x^k}{\sqrt{k^3}}$

   Řady sčítáme pro k od nuly po nekonečno nebo v případě problému s $k = 0$ od jedné po nekonečno (na hodnotách prvních členů konvergence nezávisí).

*2. Rozmyslete si, které z řad z předchozího příkladu umíte sečíst a sečtěte je.

*3. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje nebo dokonce absolutně konverguje řada

   (a) $\sum \frac{x^{2k}}{k!}$

   (b) $\sum \frac{x^{2k+1}}{k^2 2^k}$

   (c) $\sum x^{k!}$

4. Nalezněte Taylorovu řadu v bodě nula funkce sinus, ukažte, že konverguje pro všechna reálná čísla a její součet je roven sinu. To samé udělejte pro funkci kosinus.

5. Nalezněte Taylorovu řadu se středem v bodě jedna funkce odmocnina (tedy funkce, která číslu přiřadí jeho druhou odmocninu).

*6. Určete obor konvergence řady z předchozího příkladu.

*7. Nalezněte Taylorovu řadu se středem v bodě jedna funkce, která číslu x přiřadí číslo x^α, kde α je libovolné (ale pevně dané) reálné číslo. Určete, pro která x nalezená řada konverguje.

*8. Ukažte, že funkce, která $x \neq 0$ přiřadí $\exp(-1/x^2)$ spojitě rozšířená do nuly, má v nule derivace všech řádů nulové.