

Úlohy na spojitost, limity a derivace

1. Vypočtěte hodnoty limit funkce f v počátku po všech přímkách. Co odtud plyne pro limitu funkce f v počátku?

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

2. Vypočtěte hodnoty limit funkce f z předchozího příkladu v počátku po parabole $y = x^2$. Co odtud plyne pro limitu funkce f v počátku?
3. Nechte www.wolframalpha.com vykreslit grafy následujících funkcí a z grafu odhadněte, zda je možné je spojitě rozšířit na \mathbb{R}^2 . Svůj odhad zkontrolujte výpočtem.

(a) $(x, y) \mapsto \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$

(b) $(x, y) \mapsto \frac{x(x+y)}{(x^2+y^2)}$

(c) $(x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+(y-2)^2}$

(d) $(x, y) \mapsto \frac{x^3}{x^2+(y-2)^2}$

(e) $(x, y) \mapsto \frac{x^3}{x^2+(y-2)^2}$

4. Nechte www.wolframalpha.com vykreslit následující funkce a odhadněte, zda mají v bodech $\mathbf{a} = (0, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 0)$ slabou derivaci a zda mají silnou derivaci. Vyberte tu funkci, u níž předpokládáte existenci silné derivace a tuto silnou derivaci vypočtěte (součástí výpočtu je i důkaz, že je opravdu silnou derivací).

(a) $f : (x, y) \mapsto \frac{(x^2-1)y}{(x+1)^2+y^2}$

(b) $g : (x, y) \mapsto \frac{(x^2-1)y^2}{(x+1)^2+y^2}$

(c) $h : (x, y) \mapsto \frac{(x^2-1)y^3}{(x+1)^2+y^2}$