

Úlohy na 15. prosince 2020

1. Na elipse o vrcholech $[-1, 0]$, $[1, 0]$, $[0, 3]$, $[0, -3]$ nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = xy$. Výpočet zkontrolujte načrtnutím vrstevnic.
2. Pomocí vámi zvoleného softwaru vykreslete křivku o rovnici $g(x, y) = x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0$ a vypočtěte gradient funkce g v počátku. Jak se hodnota gradientu projeví na chování křivky okolo počátku?
- 2a $g(x, y) = (x + 2y)^2$

Zde není nulovost gradientu způsobena samotnou křivkou, ale způsobem jejího zadání. Ve větě o lagrangeových multiplikatorech je požadavek na nenulovost gradientu právě kvůli takovému případu.
3. Na přednášce jsme spočítali derivaci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ v počátku spojitého rozšíření funkce $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ a ukázali jsme, že se rovná jedné. Ukažte, že derivace v opačném pořadí se rovná -1.
4. Načrtněte trojúhelník o vrcholech $A = [0, 0]$, $B = [3, 1]$, $C = [2, 2]$. Do obrázku zakreslete přímky o rovnicích $y = 1/2$, $x = 1$, $x = 5/2$ a vyjádřete řezy $M_{*,1/2}$, $M_{1,*}$, $M_{5/2,*}$ ve tvaru intervalů. M zde označuje trojúhelník jako obrazec, tedy i s vnitřními body. Jak by vypadaly řezy, kdyby M byl jen obvod trojúhelníku?
5. Napište rovnice stran trojúhelníku z předchozího příkladu a popište řezy pro obecné x , y .
6. Nalezněte řezy $M_{x,*}$, $M_{*,y}$, je-li M kruh se středem v bodě $S = [-1, 2]$ a poloměrem $r = 2$.
7. Jaké jsou vnitřní, vnější, hraniční, izolované, hromadné body množiny racionálních čísel v metrickém prostoru reálných čísel s metrikou danou vzdáleností bodů na číselné ose?