

## Úlohy na 5. ledna 2021

1. Vypočtete obsah a souřadnice těžiště trojúhelníku  $ABC$  elementárně i pomocí integrálu.

$$A = [0, 0] \quad B = [3, 1] \quad C = [1, 3]$$

2. Vypočtete integrál z funkce  $f$  přes kruh se středem v počátku a poloměrem  $r = 2$ .

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

3. Co je grafem funkce z minulého příkladu? Pokud to nevíte, nechte si graf vykreslit.
4. Vypočtete oba dvojnásobné integrály funkce  $f$  přes čtverec  $OABC$  (pozor, integrály se nerovnají).

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad O = [0, 0] \quad A = [1, 0] \quad B = [1, 1]$$

Nemáte-li chuť spočítat vnitřní integrál, tek jen ověřte následující vztahy a použijte je

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = f(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -f(x, y)$$

5. Nechte geometrickým softwarem vykreslit graf funkce  $f$  a z grafu vykoukejte znaménko smíšené derivace v počátku (připomenu, že jsme spočítali, že jedna z nich je rovna jedné, druhá minus jedné).

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$$

NÁVOD: dívejte se, jak se na ose  $y$  mění derivace podle  $x$ . Zda se se zvyšujícím  $y$  zvětšuje nebo zmenšuje.

6. Vypočtete objem a souřadnice těžiště čtyřstěnu  $OABC$ .

$$O = [0, 0, 0] \quad A = [1, 0, 0] \quad B = [0, 1, 0] \quad C = [0, 0, 1]$$