Úlohy na extrémy funkcí více proměnných

1. Vypočtěte obě smíšené derivace funkce f a ukažte, že se rovnají.

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2y^2+1}$$

2. Zopakujte si, jak se zjistí, zda je zadaná kvadratická forma pozitivně či negativně definitní nebo indefinitní.

3. Nalezněte stacionární body funkce a určete jejich typ

$$f(x,y) = x^2 - 3xy - 2y^3$$

3a

$$f(x,y) = 6x^3 + 2xy + 3x^2y + y^2$$

3b

$$f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$$

3c

$$f(x,y) = xy^2 - 2xy - 3x^2 + 3x - y$$

*3d

$$f(x,y) = (x^2 + 4y^2 - 4)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

4. Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = 9x^2 - 6xy^2 - 12xy + 8y^3$ na obdélníku $M = [0,3] \times [0,2]$.

5. Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - xy^2$ na obvodu trojúhelníku ABC, $A = [-1,0]$, $B = [1,0]$, $C = [0,1]$.

6. V předchozím příkladě hledejte extrémy na trojúhelníku (tedy nejen na jeho obvodu).

7. Načrtněte vrstevnice funkce $f(x,y) = x + 2y$ a na elipse o vrcholech $[-1,0]$, $[1,0]$, $[0,3]$, $[0,-3]$ vyznačte body, v nichž funkce f nabývá na této elipse extrémy. Souřadnice bodů pak spočítejte metodou lagrangeových multiplikátorů.

8. Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = xy$ na elipse z předchozího příkladu. Výpočet zkontrolujte načrtnutím vrstevnic.