Příklad 25

$$f(x,y) = \left(x^2+4y^2-4\right)\left(x^2-2xy+4y^2\right)$$

předpis funkce upravíme:

$$f(x,y) = \left((x+2y)^2-4xy-4\right)\left((x+2y)^2-6xy\right)$$

$$f(x,y) = (x+2y)^4+(x+2y)^2(-10xy-4)+24xy(xy+1)$$

$$\begin{aligned} f'_x &= 4(x+2y)^3+2(x+2y)(-10xy-4)-10y(x+2y)^2+ \\ &\quad +24y(xy+1)+24xy^2 \\ f'_y &= 8(x+2y)^3+4(x+2y)(-10xy-4)-10x(x+2y)^2+ \\ &\quad +24x(xy+1)+24x^2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4(x+2y)^3+2(x+2y)(-10xy-4)-10y(x+2y)^2+ \\ &+24y(xy+1)+24xy^2=0 \end{aligned} \tag{25.1}$$

$$\begin{aligned} &8(x+2y)^3+4(x+2y)(-10xy-4)-10x(x+2y)^2+ \\ &+24x(xy+1)+24x^2y=0 \end{aligned} \tag{25.2}$$

Od rovnice 25.2 odečteme dvojnásobek rovnice 25.1 (čímž vynulujeme první dva členy) a takto vzniklou rovnici budeme dále upravovat:

$$-10x(x+2y)^2+24x(xy+1)+24x^2y+20y(x+2y)^2-48y(xy+1)-48xy^2=0$$

Členy povytýkáme po dvojicích následovně:

$$-10(x-2y)(x+2y)^2+24(xy+1)(x-2y)+24xy(x-2y)=0$$

Všechny členy obsahují výraz $(x-2y)$. Tento výraz tedy můžeme vytknout a budeme pokračovat s následující úpravou:

$$(x-2y)\left(-10(x+2y)^2+24(xy+1)+24xy\right)=0$$

$$(x-2y)\left(-10(x+2y)^2+24(2xy+1)\right)=0$$

Z tohoto rozložení do součinu dvou výrazů, budeme řešit 2 případy. Nejdříve dosadíme do rovnice 25.1 vyjádření $x=2y$.

$$4(4y)^3+2(4y)\left(-20y^2-4\right)-10y(4y)^2+24y\left(2y^2+1\right)+48y^3=0$$

Po roznásobení a úpravách:

$$32y^3-8y=0$$

$$8y(4y^2-1)=0$$

$$y_1=0$$

$$y_{2,3} = \pm\frac{1}{2}$$

Přičemž $x = 2y$, odtud dostáváme tři stacionární body:

$$S_1[0; 0]$$

$$S_2\left[1; \frac{1}{2}\right]$$

$$S_3\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$$

Budeme nyní řešit druhou možnost vynulování vzniklé rovnice. Odtud vyjádříme x, které dosadíme do rovnice 25.1:

$$-10(x + 2y)^2 + 24(2xy + 1) = 0$$

Po roznásobení a úpravě:

$$-5x^2 + 4xy - 20y^2 + 12 = 0$$

Rovnice je kvadratická vůči neznámé x (a y dočasně považujeme za parametr), poté diskriminat D je tvaru:

$$D = -384y^2 + 240$$

Výsledkem je vyjádření neznámé x, tedy

$$x_{1,2} = \frac{-4y \pm \sqrt{-384y^2 + 240}}{-10} = \frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2 + 15}}{5}$$

V následujících úpravách vyřešíme obě možnosti najednou. Znaménko $\pm$ bude značit kladné znaménko pro x_1 a záporné pro x_2. Naopak znaménko $\mp$ bude značit záporné znaménko pro x_1 a kladné pro x_2. Do roznásobené rovnice 25.1 dosadíme vzniklé vyjádření pro x a budeme rovnici upravovat:

$$2\left(\frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2 + 15}}{5}\right)^3 - 3\left(\frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2 + 15}}{5}\right)^2 y +$$

$$+8\left(\frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2 + 15}}{5}\right) y^2 - 4\left(\frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2 + 15}}{5}\right) - 4y^3 + 4y = 0$$

Rovnici vynásobíme číslem 125 pro odstranění jmenovatelů zlomků. Dále jednotlivé mocniny dvojčlenů rozepíšeme.

$$2\left(2y \pm 2\sqrt{-24y^2 + 15}\right)^3 - 15y\left(2y \pm 2\sqrt{-24y^2 + 15}\right)^2 +$$

$$+200y^2\left(2y \pm 2\sqrt{-24y^2 + 15}\right) - 100\left(2y \pm 2\sqrt{-24y^2 + 15}\right) - 4y^3 + 4y = 0$$

$$16y^3 \pm 48y^2\sqrt{-24y^2+15} + 48y(-24y^2+15) \pm 16(-24y^2+15)\sqrt{-24y^2+15} -$$
$$-60y^3 \mp 120y^2\sqrt{-24y^2+15} - 60y(-24y^2+15) + \ 400y^3 \pm 400y^2\sqrt{-24y^2+15} -$$
$$-200y \mp 200\sqrt{-24y^2+15} - 500y^3 + 500y = 0$$

Posčítáme členy s pouze třetí a s pouze první mocninou neznámé y, z výrazů s odmocninou tuto odmocninu vytkneme:

$$144y^3 + 120y + (\mp 56y^2 \pm 40)\sqrt{-24y^2+15} = 0$$

$$(\mp 56y^2 \pm 40)\sqrt{-24y^2+15} = -(144y^3 + 120y)$$

Rovnici umocníme, přičemž je zbytečné dále řešit možnosti $\mp$ a $\pm$. Z důvodu druhé mocniny vybereme jednu možnost.

$$(-56y^2+40)^2(-24y^2+15) = (144y^3+120y)^2$$

Zavedeme substituci $y^2 = n$, dále výrazy roznásobíme:

$$(-56n+40)^2\,(-24n+15) = n\,(144n+120)^2$$

$$-96\ 000n^3 + 120\ 000n^2 - 120\ 000n + 24\ 000 = 0 \ / : (-24\ 000)$$
$$4n^3 - 5n^2 + 5n - 1 = 0$$

Využijeme vědomosti odvozené v kapitole racionální kořen kubické rovnice v dodatcích. Je-li kořen racionální, pak jeho možné hodnoty jsou $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$. Postupným zkoušením naleznem kořen této kubické rovnice $n = \frac{1}{4}$. Díky tomu můžeme kubickou rovnici přepsat do tvaru, odkud je kořeny snadné vypočítat:

$$\left(n - \frac{1}{4}\right)\left(4n^2 - 4n + 4\right) = 0$$

Diskriminant vzniklé kvadratické rovnice je záporný, tudíž je reálné n pouze jedno.

$$n = \frac{1}{4}$$

Návratem do substituce:

$$y_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$$

Po dosazení do vztahu:

$$x_{1,2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2+15}}{5}$$
$$x_{1,2,3,4} = \frac{\pm 1 \pm 6}{5}$$

Během postupu byla použita neekvivalentní úprava – umocnění rovnice. Zkouškou se přesvědčíme, že dosazením $x = -\frac{7}{5}$ a $x = \frac{7}{5}$ pro vypočítaná $y_{1,2}$ soustavu nesplňují. Zatímco zbylá vypočítaná x ano. Přibývají výsledky:

$$S_4\left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

$$S_5\left[1,-\frac{1}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 12x^2 - 12xy + 16y^2 - 8 \\ f''_{xy} &= -6x^2 + 32xy - 24y^2 + 8 \\ f''_{yy} &= 16x^2 - 48xy + 192y^2 - 32 \end{aligned}$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -32 \end{vmatrix} = 192$$

S_1 je lokální maximum funkce.

$$H_2 = H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 12 & -16 \end{vmatrix} = -176$$

S_2 a S_3 jsou sedlové body funkce.

$$H_4 = H_5 = \begin{vmatrix} 14 & -20 \\ -20 & 56 \end{vmatrix} = 384$$

S_4 a S_5 jsou lokální minima funkce.

Jiný způsob řešení příkladu:

$$f(x,y) = (x^2 + 4y^2 - 4)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

Položme substituci:

$$x^2 + 4y^2 = t$$

$$xy = s$$

Vzniká tak funkce:

$$g(s,t) = (t-4)(t-2s) = t^2 - 4t - 2st + 8s$$

$$\begin{aligned} g'_s &= -2t + 8 \\ g'_t &= 2t - 4 - 2s \end{aligned}$$

$$-2t + 8 = 0 \tag{25.3}$$

$$2t - 4 - 2s = 0 \tag{25.4}$$

Z rovnice 25.3 je vidět, že $t = 4$ a součtem obou rovnic 25.3 a 25.4 získáváme $s = 2$. Návratem do substitucí získáváme soustavu:

$$x^2 + 4y^2 = 4 \tag{25.5}$$

$$xy = 2 \tag{25.6}$$

Vyjádříme x z rovnice 25.6 a toto vyjádření dosadíme do rovnice 25.5.

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 + 4y^2 = 4$$

Vynásobením jmenovatelem a přeřazením členů získáváme:

$$4y^4 - 4y^2 + 4 = 0$$

Rovnice je bikvadratická, nicméně po substituci typické pro tyto rovnice bychom získali kvadratickou rovnici, která nemá reálné kořeny (záporný diskriminant). Odtud tedy stacionární body nezískáme. Z derivace složeného zobrazení víme:

$$f'_x = s'_x \cdot g'_s + t'_x \cdot g'_t$$

$$f'_y = s'_y \cdot g'_s + t'_y \cdot g'_t$$

Zapsáno pomocí matice a vektorů:

$$\begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s'_x & t'_x \\ s'_y & f'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_s \\ g'_t \end{pmatrix}$$

Přičemž chceme, aby se tento součin rovnal nule. Tedy po výpočtu jednotlivých parciálních derivací získáváme:

$$\begin{pmatrix} y & 2x \\ x & 8y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_s \\ g'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jak jsme již zjistili, vektor v součinu není nulový, jediná možnost, jak dostat nulový vektor, je, když bude matice v součinu singulární (lineárně závislé řádky). Její determinant tedy položíme roven nule.

$$8y^2 - 2x^2 = 0$$

Po rozložení:

$$2(2y - x)(2y + x) = 0$$

Matice je singulární, pokud platí:

$$x = \pm 2y$$

Po úpravách jsou parciální derivace funkce $f(x, y)$:

$$f'_x = 4x^3 - 6x^2y + 16xy^2 - 8x - 8y^3 + 8y$$
$$f'_y = 8x - 2x^3 - 32y + 16x^2y - 24xy^2 + 64y^3$$

Opět vytvoříme soustavu rovnic:

$$4x^3 - 6x^2y + 16xy^2 - 8x - 8y^3 + 8y = 0 \tag{25.7}$$
$$8x - 2x^3 - 32y + 16x^2y - 24xy^2 + 64y^3 = 0 \tag{25.8}$$

Předchozí úvaha nás dovedla k získání vztahu mezi souřadnicemi stacionárních bodů. Dosadíme do rovnice 25.7 vyjádření $x = 2y$.

$$4 \cdot (2y)^3 - 6 \cdot (2y)^2 y + 16 \cdot (2y)y^2 - 8 \cdot (2y) - 8y^3 + 8y = 0$$

$$32y^3 - 8y = 0$$

$$8y(2y - 1)(2y + 1) = 0$$

Dosazením do první rovnice $x = -2y$, získáme po podobných úpravách:

$$4 \cdot (-2y)^3 - 6 \cdot (-2y)^2 y + 16 \cdot (-2y)\, y^2 - 8 \cdot (-2y) - 8y^3 + 8y = 0$$

$$-96y^3 + 24y = 0$$

$$-24y(2y - 1)(2y + 1) = 0$$

Jednotlivá řešení těchto rovnic tvoří s příslušnou substitucí stacionární body.

$$S_1\,[0; 0]$$

$$S_2 \left[1; \frac{1}{2}\right]$$

$$S_3 \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$$

$$S_4 \left[1; -\frac{1}{2}\right]$$

$$S_5 \left[-1; \frac{1}{2}\right]$$

Dále bychom opět postupovali jako v předchozím postupu a došli tak ke stejnému závěru.