Úlohy na metrické prostory

1. (a) Ukažte, že vnitřní bod množiny M je prvkem množiny M.
   (b) Ukažte, že vnější bod množiny M není prvkem množiny M.

2. Načrtněte množinu $M = [0, 2) \times [-1, 2]$ ($\times$ značí kartézský součin), určete její hranici ∂M a nalezněte body $a, b \in \partial M$ takové, že $a \in M$, $b \notin M$.

3. Ukažte, že bod a je hraniční bod množiny M právě když není ani vnitřním bodem M ani vnějším bodem M.

4. Uveďte příklad množiny, jejíž všechny body jsou hraniční (tj. množina obsahuje samé hraniční body, neobsahuje žádný vnitřní bod).

5. Ukažte, že hranice ∂M množiny M je podmnožinou M (tj. $\partial M \subseteq M$) právě když je doplněk M otevřená množina.

6. Nalezněte čísla C_1, C_2, C_3, C_4 taková, že pro každý vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\begin{aligned} C_1 \max\{|x|, |y|, |z|\} &\leq |x| + |y| + |z| \\ |x| + |y| + |z| &\leq C_2 \max\{|x|, |y|, |z|\} \\ C_3(|x| + |y| + |z|) &\leq \max\{|x|, |y|, |z|\} \\ \max\{|x|, |y|, |z|\} &\leq C_4(|x| + |y| + |z|) \end{aligned}$$

   (Všimněte si, vztahu C_2 s C_3 a C_1 s C_4.)

7. Nalezněte čísla C_1, C_2 taková, že pro každý vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\begin{aligned} C_1 \max\{|x|, |y|, |z|\} &\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &\leq C_2 \max\{|x|, |y|, |z|\} \end{aligned}$$