Úlohy na řady funkcí I

1. Odvoďte vzorce pro součet konečné a nekonečné geometrické řady.

2. Ukažte, že následující řada je geometrická, vypočtěte její kvocient, určete, pro jaká x je řada konvergentní a pro která má součet a tento součet vypočtěte.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$$

2a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{3^k}$$

3. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ má řada součet a pro která $x \in \mathbb{R}$ je konvergentní.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k2^k}$$

4. Na přednášce ukážeme, že mocninnou řadu lze derivovat člen po členu, tedy, že platí

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k2^k}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(x-2)^k}{k2^k}\right)'$$

Sečtěte řadu na pravé straně rovnosti. Derivujte podle x a pokud členy zderivujete správně, dostanete geometrickou řadu.

5. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$$

*6. Sečtěte řadu z předchozího příkladu.

7. Ukažte, že posloupnost $\left\{(\sin x)^{2k}\right\}_{k=0}^{\infty}$ je pro $x \in \mathbb{R}$ geometrická a vypočtěte její kvocient.

8. Načrtněte grafy několika členů posloupnosti z příkladu 7 a graf její limity.