

Úlohy na řady funkcí II

1. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje nebo dokonce absolutně konverguje řada

(a) $\sum \frac{x^k}{(2k)!}$

(b) pro $r \in \mathbb{R}$, $r \in (0, +\infty)$: $\sum \frac{x^k}{r^k}$

(c) $\sum (-1)^k x^k$

(d) $\sum \frac{x^k}{\sqrt{2k+1}}$

Řady sčítáme pro k od nuly po nekonečno nebo v případě problému s $k = 0$ od jedné po nekonečno (na hodnotách prvních členů konvergence nezávisí).

2. Umíte některou z řad z předchozího příkladu sečíst?

- *3. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje nebo dokonce absolutně konverguje řada

(a) $\sum \frac{x^{2k}}{k!}$

(b) $\sum \frac{x^{2k+1}}{k^2 2^k}$

(c) $\sum x^{k!}$

4. Nalezněte Taylorovu řadu v bodě nula funkce sinus, ukažte, že konverguje pro všechna reálná čísla a její součet je roven sinu. To samé udělejte pro funkci logaritmus v bodě jedna.

5. Nalezněte Taylorovu řadu se středem v bodě jedna funkce odmocnina (tedy funkce, která číslu přiřadí jeho druhou odmocninu).

- *6. Určete obor konvergence řady z předchozího příkladu.

- *7. Nalezněte Taylorovu řadu se středem v bodě jedna funkce, která číslu x přiřadí číslo x^α , kde α je libovolné (ale pevně dané) reálné číslo. Určete, pro která x nalezená řada konverguje.

- *8. Ukažte, že funkce, která $x \neq 0$ přiřadí $\exp(-1/x^2)$ spojitě rozšířená do nuly, má v nule derivace všech řádů nulové.