# Úlohy na řady funkcí III

1. Vypočtěte členy řady, znáte-li její částečné součty

   (a) $s_n(x) = \sin^{2n} x$

   (b) $s_n(x) = x - x^n$

2. Načrtněte grafy několika prvních částečných součtů řady z 1b.

*3. Ukažte na grafech z příkladu 2, že posloupnost z 1b není stejnoměrně konvergentní na intervalu $(0, 1)$.

4. Ukažte, že mocninná řada i její derivace mají stejný poloměr konvergence.
   Návod: Použijte vzorec, který jsme pro poloměr konvergence odvodili na řady $\sum a_k x^k$, $\sum (a_k x^k)'$ a předpokládejte, že uvedené limity existují.

5. Vyjádřete funkce $f$ jako součet nekonečné mocninné řady se středem v bodě nula.

   (a) $f : x \mapsto \frac{3}{1-2x}$

   (b) $f : x \mapsto \frac{3}{2-x}$

   (c) $f : x \mapsto (\frac{3}{1-2x})'$

   (d) $f : x \mapsto (\frac{3}{2-x})'$

   (e) $f : x \mapsto \frac{6}{(1-2x)^2}$

   (f) $f : x \mapsto \frac{3}{(2-x)^2}$

6. Vyjádřete funkce z předchozího příkladu jako součet nekonečné mocninné řady se středem v bodě jedna.

7. Vyjádřete funkci $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}$ jako součet nekonečné mocninné řady se středem v bodě nula.

8. Vyjádřete funkce z předchozího příkladu jako součet nekonečné mocninné řady se středem v bodě mínus jedna.

9. Nalezněte Taylorovy řady se středem v nule funkcí z úlohy 5.

10. Nalezněte Taylorovu řadu se středem v nule funkce

$$x \mapsto \frac{3x^2 + 9}{(x-1)(x^2-1)}$$

Návod k příkaldům 5 až 8: Zlomky v 5a,b jsou součtem geometrické řady, přitom u úlohy 5a je vidět první člen a kvocient bez úpravy, v ostatních úlohách je třeba zlomky upravit.

Poznámka: Součástí výsledku u příkaldů 5 až 8 je i obor pro $x$.