

## Úlohy na spojitost, limity a derivace

1. Vypočtete hodnoty limit funkce  $f$  v počátku po všech přímkách. Co odtud plyne pro limitu funkce  $f$  v počátku?

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$$

1a

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy^3}{x^6 + y^4}$$

2. Nechte WolframAlpha/GeoGebra Klasik vykreslit graf funkce  $f$  a z grafu odhadněte, zda je možné ji spojitě rozšířit na  $\mathbb{R}^2$ . Svůj odhad zkontrolujte výpočtem.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(x^2 - x)(y^2 - 4)}{x^2 + (y - 2)^2}$$

2a

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(x + y - 3)(x - y + 1)}{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}$$

2b

$$f : (x, y) \mapsto \frac{y^3}{(x + 3)^2 + y^2}$$

3. Vypočtete parciální derivace funkce  $f$  v počátku (zde je třeba použít definici). Nechte WolframAlpha/GeoGebra Klasik vykreslit graf funkce  $f$  a odhadněte, zda je v bodě  $\mathbf{a} = (0, 0)$  spojitá, zda v něm má slabou derivaci a zda v něm má silnou derivaci. Případnou existenci silné derivace dokažte.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(x^2 + x)y}{x^2 + y^2} \text{ pro } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

3a

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(x^2 + x)y^2}{x^2 + y^2} \text{ pro } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

3b

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(x^2 + x)y^3}{x^2 + y^2} \text{ pro } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

4 – 4b Zdůvodněte, že mají funkce z příkladů 3 – 3b slabou i silnou derivaci v bodě  $\mathbf{b} = (1, -1)$  a vypočtěte je.

**Kontrolní otázky, úkoly:**

1. Vysvětlete souvislost tečné roviny a silné derivace. Při vysvětlování si pomozte případem funkce jedné proměnné.
2. Čím se liší slabá a silná derivace? Je možné aby měla funkce v bodě slabou derivaci a neměla v něm silnou derivaci? A naopak: Je možné aby měla funkce v bodě silnou derivaci a neměla v něm slabou derivaci? Jak je to v případě funkce jedné proměnné?