$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x) \quad \dots \quad T(x) \text{ k } f$$

předpokládáme
kladný poloměr konvergence

včera: $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

závěr: $\sum a_k x^k \longrightarrow$ sečtu ji $\longrightarrow$ Taylorova řada součtu

$=$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{odtud} \qquad T(x) = \sum x^n \text{ je T. ř.}$$

funkce $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$$\begin{tikzcd}
\text{mocninná řada} \arrow[r] & \text{součet} \arrow[r] \arrow[l, phantom] & \text{Taylorova řada} \arrow[ll, bend left, dashed, "="]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{funkci} \arrow[r] & \text{Taylorova řada} \arrow[r] & \text{součet} \arrow[l, bend left, dashed, "?"]
\end{tikzcd}$$

$f(x) = \sin x$

$\cos x$

$\exp x$

$T(x) = \cancel{\ } x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ součet $= \sin x$ (zpětná šipka k $f(x)$ označená $=$)

$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$x_0 = 0$

$T(x) = \cancel{\ } \sum 0 x^n = 0$

$\neq$

Taylorova řada $f(x) = \log(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \mp \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

~~log~~

hledáme primitivní funkci na $(0,2)$

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \log(1+x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Z věty o derivaci mocninné řady člen po členu víme:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Víme:

$$\sum_{n=\cancel{0}1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad \log(1+x)$$

obě jsou primitivní funkce k $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

na $(0,2)$

odkud

$$\sum_{n=\cancel{0}1}^{\infty} (-1)^{\cancel{n}n-1} \frac{x^n}{n} = \log(1+x) + C$$

$x=0$: $\quad 0 = \log 1 + C$

$$C = 0$$

Závěr:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$