Extrémy funkce dvou proměnných

Definice:

Řekneme, že funkce $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^2$ ~~ext~~ maximum (minimum) na množině ~~Ex~~ $M \subseteq \mathbb{R}^2$, pokud

$$(\forall x \in M)\left(f(x) \underset{\geq}{\leq} f(a)\right)$$

Řekneme, že funkce $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^2$ lokální maximum (minimum), pokud

$$(\exists \delta > 0)\left(f \text{ má v } a \text{ maxim (minim) na } U_\delta(a)\right)$$

V případě, že M je křivka tak většinou mluvíme o ~~na~~ extrému vázaném na křivku M.

Příklady:

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$

$M = \mathbb{R}^2$

f má minimum v $a=(0,0)$ na M

f nemá maximum na M

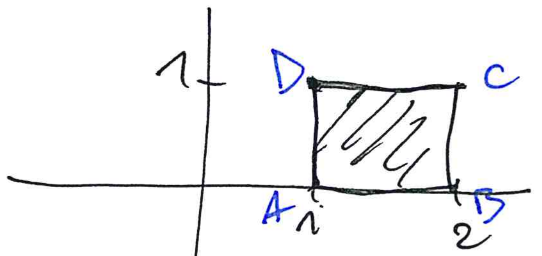
f má v $a=(0,0)$ lokální minimum

2) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

f nabývá na M maxima v bodě C

minima v bodě A

M:



$M = [1,2] \times [0,1]$

3) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 3x$

a) $M = \mathbb{R}^2$

b) M je ~~[illegible]~~ osa 1. a 3. kvadrantu

$y = x$

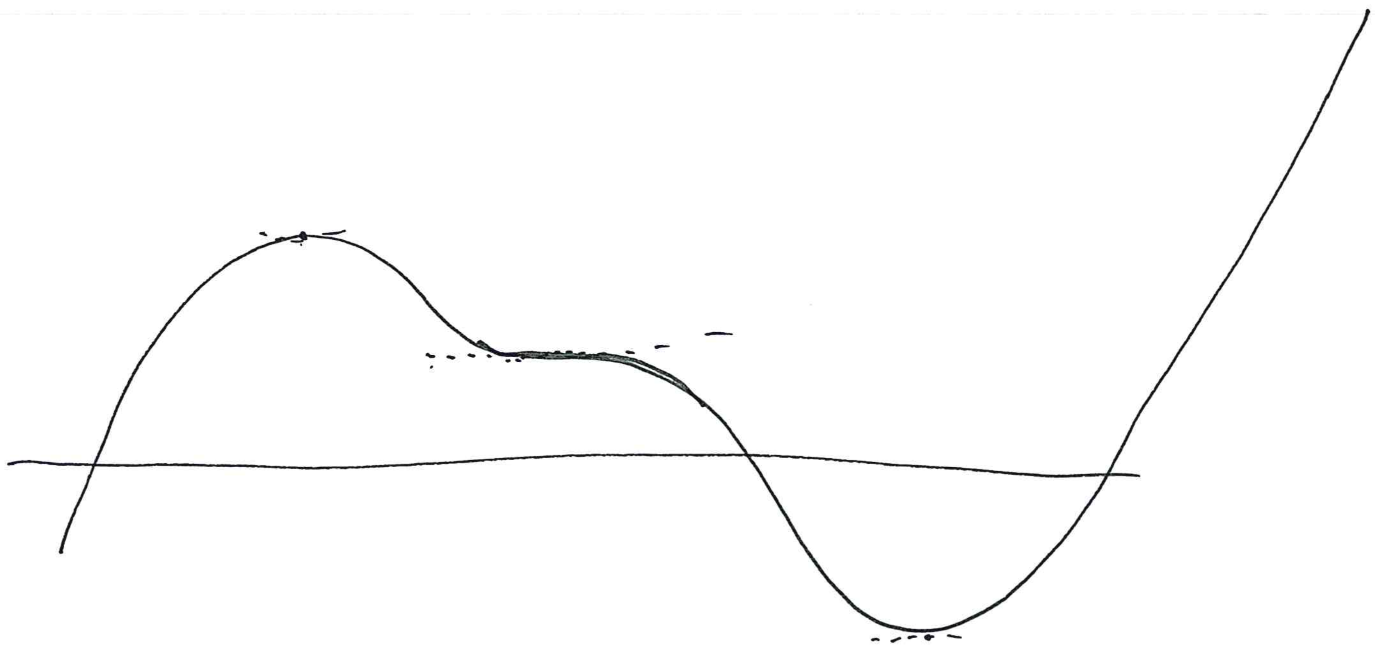
$\downarrow$

$f(x, y=x)$

$f(x,x) = 4x^2 + 3x$ minimum v bodě $x = -\frac{3}{8}$

maximum nemá

f má na M minimum v bodě $a = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}\right)$



Definice:

Řekneme, že má funkce ~~f v bodě~~ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ v bodě $a\in\mathbb{R}^2$ stacionární bod, pokud

$$\cancel{\text{grad}}\ \text{grad}\, f(a)=(0,0)$$

(tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(a)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)=0$)

Věta:

Má-li f v bodě a lokální extrém, pak v tomto bodě ~~buď má derivace~~ každá z derivací $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ buď neexistuje nebo je nulová.

Důkaz plyne z lemmatu o znaménku derivace a chování funkce v okolí bodu a z toho, že f má lokální extrém i na obou přímkách

$x = a_x$

$y = a_y$ $\quad a = (a_x, a_y)$

3a) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 4y$$

Stacionární body:

$$2x + y + 3 = 0$$
$$x + 4y = 0$$