Funkce jedné proměnné, Taylorův polynom

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$f(x) = T_1(x) + R_1(x)$$

$$\frac{R_1(x)}{x-a} = \frac{f(x) - T_1(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \longrightarrow 0$$

pro $x \to a$

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

$$f(x) = T_2(x) + R_2(x)$$

$$\frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - T_2(x)}{(x-a)^2} = \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^2}$$

$$\text{L'H:} \quad \frac{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2}\,\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} - \frac{1}{2} f''(a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Taylorův polynom funkce dvou proměnných

$x, a \in \mathbb{R}^2$

$$T_1(x) = f(a) + \operatorname{grad} f(a) \cdot (x-a)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$$f(x) = T_1(x) + R_1(x)$$

$$\frac{R_1(x)}{\|x-a\|} = \frac{f(x) - T_1(x)}{\|x-a\|} = \frac{f(x) - f(a) - \operatorname{grad} f(a) \cdot (x-a)}{\|x-a\|} \longrightarrow 0$$

pro $x \to a$

v případě, že f má v bodě a silnou derivaci

Hessova matice

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Př: $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{(xy)^2 + 1}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy\,(x^2y^2+1) - x^2y \cdot (2xy^2)}{\left((xy)^2+1\right)^2} = \frac{2xy}{(x^2y^2+1)^2} = 2xy(x^2y^2+1)^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x\,(x^2y^2+1)^{-2} - 4xy\; 2x^2y\,(x^2y^2+1)^{-3} =$$

$$= \frac{2x^3y^2 + 2x - 8x^3y^2}{(x^2y^2+1)^3} = \frac{2x - 6x^3y^2}{(x^2y^2+1)^3}$$

D.Ú. ověřte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Věta:

Má-li funkce f v okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$ spojité derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, pak se rovnají: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$

Definice:

Nechť A je symetrická matice 2×2.
Zobrazení, které $x \in \mathbb{R}^2$ přiřadí číslo $x^T A x$

nazýváme kvadratickou formou.

Matici A (kvadratickou formu) nazveme

a) pozitivně definitní, pokud $(\forall x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0)(x^T A x > 0)$

— " — $<$

b) negativně

c) indefinitní, pokud $(\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2)(x_1^T A x_1 > 0, \; x_2^T A x_2 < 0)$

D.Ú: zopakujte si (z lineární algebry) jak poznáme, že je matice (kvadratická forma) pozitivně def., negativně def., indefinitní

$x, a \in \mathbb{R}^n$ Taylorův polynom 2. stupně funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$T_2(x) = f(a) + \operatorname{grad} f(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^T \cdot H \cdot (x-a)$$

$$f(x) = T_2(x) + R_2(x)$$

Má-li f v okolí bodu a spojité parciální derivace druhého řádu, pak platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_2(x)}{\|x-a\|^2} = 0$$

Derivace a extrémy

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(a) = 0 \quad \dots \quad T_2(x) = f(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + R_2(x)$$

$$f(a) + (x-a)^2 \underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{2} f''(a)}_{>0} + \underbrace{\frac{R_2(x)}{(x-a)^2}}_{\to 0} \right)}_{\substack{\text{v okolí } a \\ > 0}}$$

$a: \quad f'(a) = 0, \; f''(a) > 0$

$f(x) > f(a)$ .. f má v bodě a lokální minimum

$f'(a) = 0, \; f''(a) < 0 : \quad f(x) < f(a)$ .. v a lok. maximum

Extrémy a derivace pro funkci $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{grad} f(a) = (0,0) \\ H(a) \text{ je pozitivně definitní} \end{array}\right\} \text{ v bodě } a \text{ má } f \text{ lokální minimum}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{grad} f(a) = (0,0) \\ H(a) \text{ je negativně definitní} \end{array}\right\} \text{ v bodě } a \text{ má } f \text{ lokální maximum}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{grad} f(a) = (0,0) \\ H(a) \text{ je indefinitní} \end{array}\right\} \begin{array}{l} f \text{ nemá v bodě } a \text{ lokální} \\ \text{extrém, takový bod nazýváme} \\ \text{sedlový bod} \end{array}$$

$f_1(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad$ $\operatorname{grad} f_1 = (2x, 2y)$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{je pozitivně definitní}$$

stacionární bod: $(0,0)$

kvadratický člen: $\frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 > 0$ pro $(x_1, x_2) \neq (0,0)$

$f_2(x,y) = -x^2+2x-y^2+3y$

$\text{grad} f = (-2x+2, -2y+3)$

stacionární bod: $[1, \frac{3}{2}]$

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

je negativně definitní, tedy f_2 má v bodě $[1, \frac{3}{2}]$ lokální maximum

kvadratický člen:

$$\frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2 < 0$$

pro $(x_1, x_2) \neq (0,0)$

$f_3(x,y) = xy$

$\operatorname{grad} f_3 = (y, x)$ ... stacionární bod $(0,0)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je indefinitní

~~f_3 má v~~ $(0,0)$ je sedlový bod f_3

kvadratická část

$$\frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$$

$$2x - 3y = 0 \quad | \cdot 3$$

$$-3x - 6y^2 = 0 \quad | \cdot 2$$

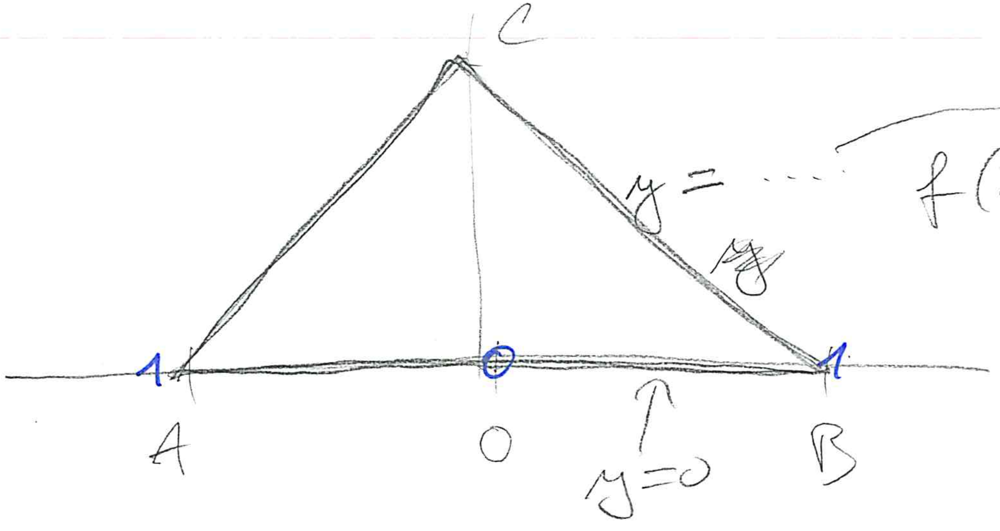
$$-9y - 12y^2 = 0$$

$$y_1 = 0 \qquad x_1 = 0$$

$$y_2 = \cancel{-\frac{4}{3}} \quad -\frac{3}{4} \qquad x_2 = \cancel{-2} \quad -\frac{9}{8}$$

$$S_1 = [0, 0] \qquad H_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \left[-\frac{9}{8}, -\frac{3}{4}\right] \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$$



$$f(x,y) = x^2 - xy^2$$

$$f(x, \ldots) = g(x), \quad x \in [0,1]$$

$$f(x,0) = x^2$$

Obdoba Weierstrassovy věty: f nabývá na příslušné extrémních hodnot