Euklidovská norma vektoru $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

pro $v=(v_1,\dots,v_d)\in\mathbb{R}^d$ je $\|v\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\dots+v_d^2}$

Euklidovská vzdálenost bodů $a, b\in\mathbb{R}^d$ je norma $\|a-b\|$ (rozdíl vektorů počítáme po složkách)

$B_r(s)$ značí pro $r\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}^d$ d-rozměrnou (otevřenou) kouli o poloměru r a se středem v bodě s

$$B_r(s)=\{x\in\mathbb{R}^d : \|x-s\| < r\}$$

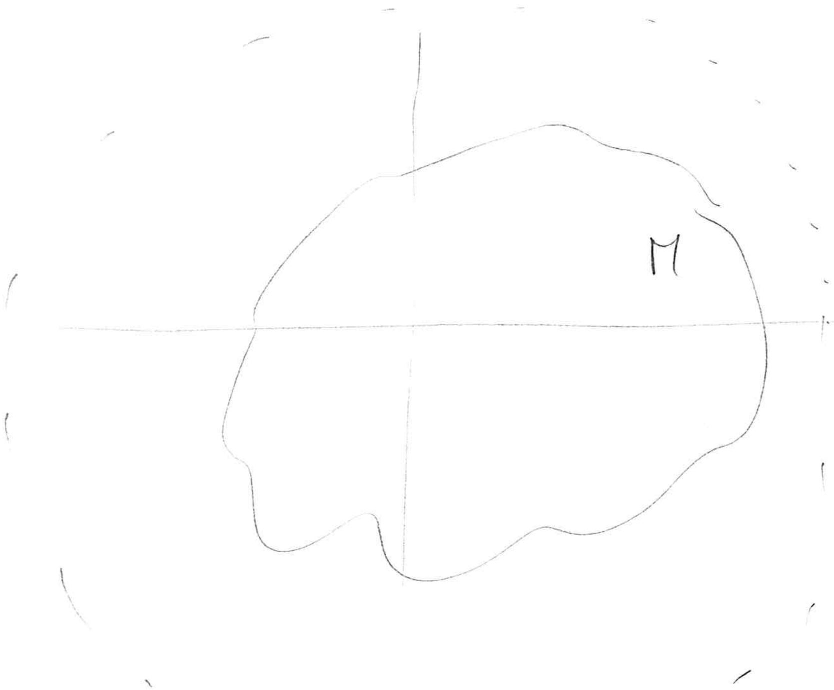
(viz též přednáška o limitách a spojitosti, značili jsme $U_r(s)$)

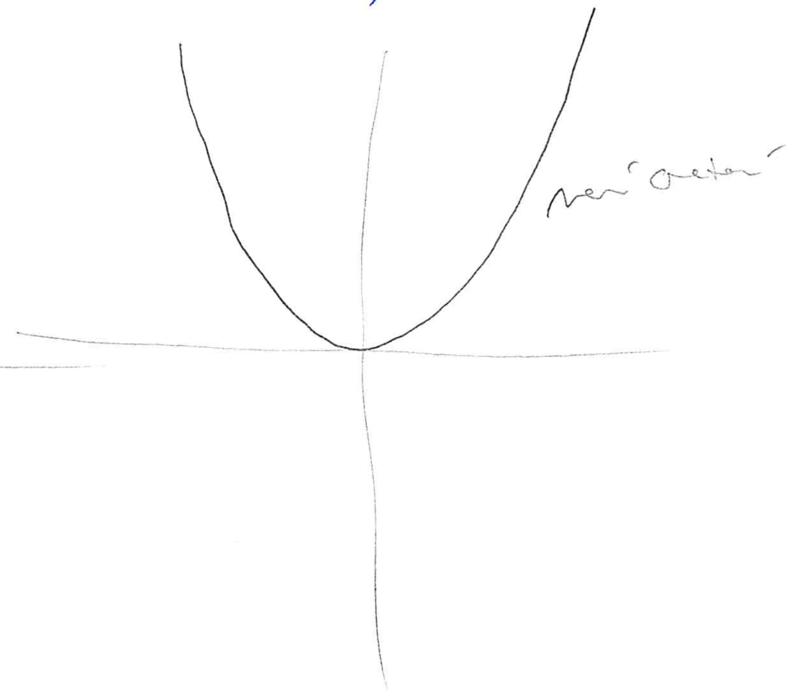
Množinu $M \subseteq \mathbb{R}^d$ nazveme omezenou množinou, pokud

$$(\exists r \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(\|x\| < r)$$

jinak zapsáno:

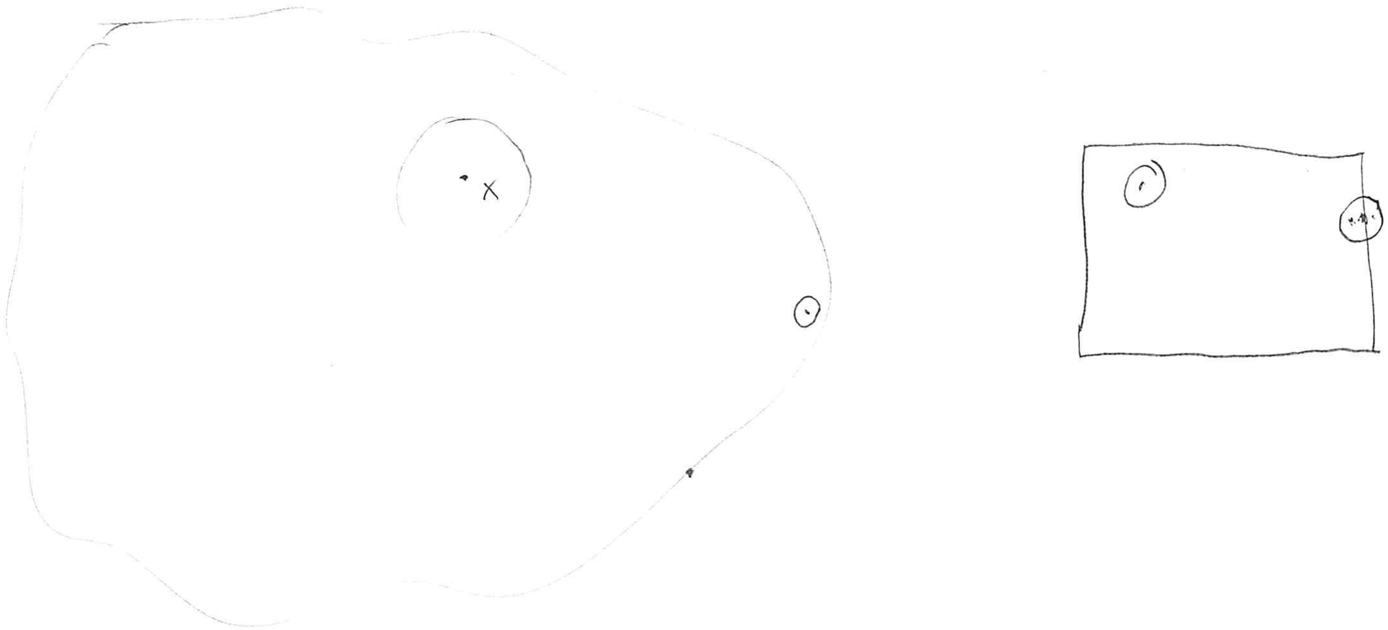
$$(\exists r \in \mathbb{R})(M \subseteq B_r(o))$$





Bod $x \in \mathbb{R}^d$ nazveme vnitřním bodem množiny $M \subseteq \mathbb{R}^d$, pokud

$$(\exists r \in (0,+\infty))(B_r(x) \subseteq M)$$



Bod $x \in \mathbb{R}^d$ nazveme hraničním bodem množiny M, pokud

$$(\forall r \in (0,+\infty))\big(B_r(x) \cap M \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset\big)$$

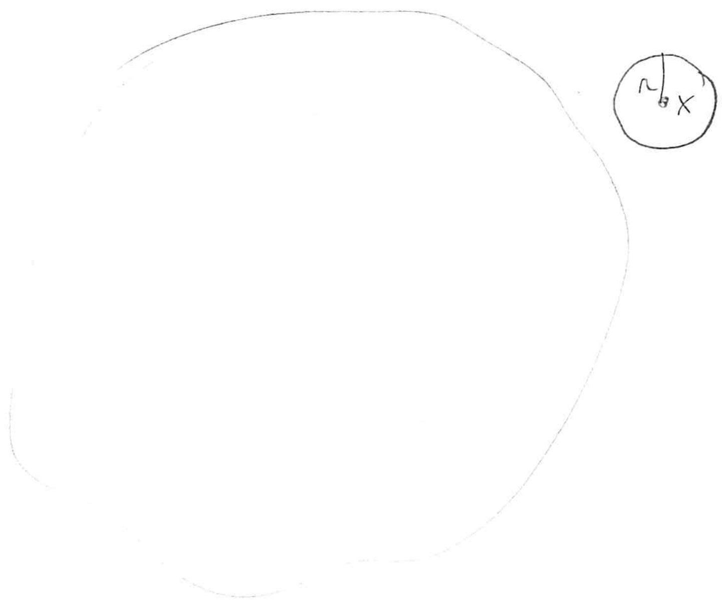
doplněk M: $x \notin M$, $x \in \mathbb{R}^d$

jinak zapsáno:

$$(\forall r \in (0,+\infty)) \cancel{(\exists x_1 \in M)(}$$
$$(\exists x_1, x_2 \in B_r(x))(x_1 \in M, x_2 \notin M)$$

Bod $x \in \mathbb{R}^d$ nazveme vnějším bodem množiny $M \subseteq \mathbb{R}^d$, pokud

$$(\exists r \in (0, +\infty))\left(B_r(x) \cap M = \emptyset\right)$$



Množinu $M \subseteq \mathbb{R}^d$ nazveme otevřenou množinou, pokud je každý bod $x \in M$ vnitřní bod množiny M.

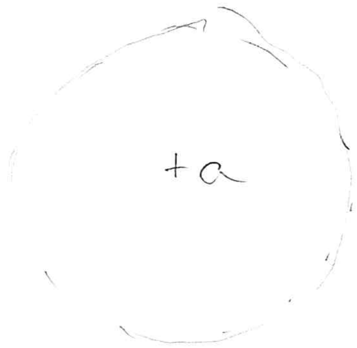
$(a,b) \times (c,d)$

$B_r(a)$

Množina hraničních bodů množiny $M \subseteq \mathbb{R}^d$ nazýváme hranicí množiny M, značíme ∂M.

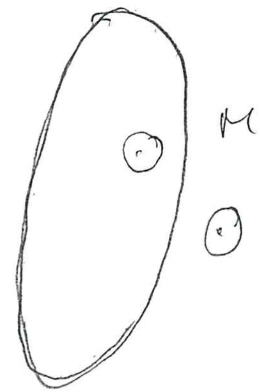
$$M = B_r(a)$$

$$\partial M = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| = r \}$$



Množinu $M \subseteq \mathbb{R}^d$ nazveme uzavřenou množinou, pokud obsahuje všechny své hraniční body (tj $\partial M \subseteq M$).

Pozn.:
M je otevřená $\iff$ neobsahuje žádný svůj hraniční bod
M je uzavřená právě když je $\mathbb{R}^d \setminus M$ otevřená.



M je kružnice

$\partial M = \partial(\mathbb{R}^d \setminus M)$

Pozorování:

$M \subseteq \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$

platí právě jedno tvrzení:

1) x je vnitřní bod M

2) x je hraniční bod M

3) x je vnější bod M

dále platí

a) je-li ~~M vn~~ x vnitřní bod M,

pak $x \in M$

b) je-li x vnější bod M, pak $x \notin M$

c) je-li hraniční, pak může platit $x \in M$ i $x \notin M$

v $\mathbb{R}^1$

Vícerozměrná obdoba Weierstrassovy věty:

Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^d$ uzavřená a omezená a funkce f je spojitá na M, pak existují $a, b \in M$ taková, že

$$(\forall x \in M)(f(a) \leq f(x) \leq f(b))$$

tj. f nabývá minimální hodnoty na množině M v bodě a a maximální hodnoty v bodě b.

METRICKÉ PROSTORY

Definice:

Metrický prostor je dvojice (P, ρ), kde P je množina, ρ je zobrazení $P \times P \to \mathbb{R}$ splňující:

1) $(\forall a, b \in P)(\rho(a,b) = \rho(b,a))$
(symetrie)

2) (pozitivita)
$$(\forall\, a, b \in P)(\rho(a,b) \geq 0)$$
~~$\rho(a,a) = 0$ právě když~~
$$\rho(a,b) = 0 \iff a = b$$

3) $(\forall a, b, c \in P)(\rho(a,b) + \rho(b,c) \geq \rho(a,c))$
(trojúhelníková nerovnost)

Příklad:

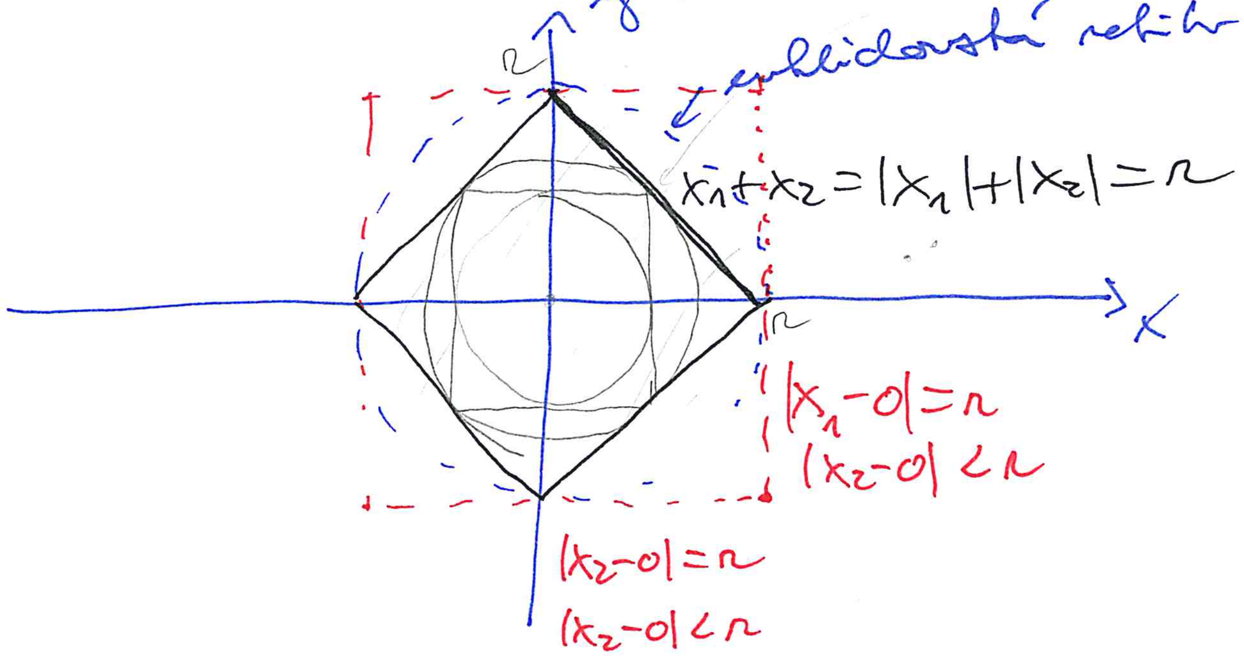
1) $P = \mathbb{R}^2$, $\rho(a,b) = \|a-b\|$ některá z norem:

1a) $\|(x_1,x_2)\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$

1b) $\|(x_1,x_2)\|_1 = |x_1|+|x_2|$

1c) $\|(x_1,x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\}$

(kružnice v těchto prostorech) $B_r(0,0) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \|(x-0,y-0)\| < r\}$



Okolí bodu $a \in P$ v metrickém prostoru (P, ρ):

$$B_r(a) = U_r(a) = \{x \in P : \rho(a,x) < r\}$$

(ball) (umgebung)

pomocí okolí definujeme spojitost a limitu funkce.

Dvě metriky ρ_1, ρ_2 na ~~prostoru~~ neprázdné množině P nazveme ekvivalentní, pokud existují $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$(\forall a, b \in P)\big(C_1 \rho_2(a,b) \le \rho_1(a,b) \le C_2 \rho_2(a,b)\big)$$

Platí: 1) ekvivalentní metriky dají stejný pojem spojitosti a limity

2) euklidovská, maximová a součtová metrika jsou po dvou ekvivalentní

POSLOUPNOSTI V METRICKÝCH PROSTORECH

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n \in P$ je konvergentní v metrickém prostoru (P, ρ), pokud existuje $a \in P$ takové, že $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(a_n, a) = 0$

Příklad:

$P = \mathbb{R}^2$, $\rho(a, b) = \|a - b\|_{max}$

$a_n = \left[2 - \frac{1}{n}, \frac{\sin n}{n}\right]$ ~~je~~ je prvky konvergentní posloupnosti s limitou $a = [2, 0]$

$\rho_{max}\left(\cancel{[2-\frac{1}{n}} \; a_n, a\right) = \rho_{max}\left(\left[2 - \frac{1}{n}, \frac{\sin n}{n}\right], [2, 0]\right) =$

$$\left\|\left(2-\frac{1}{n}-2,\ \frac{\sin n}{n}-0\right)\right\|_{max} = \max\left\{\left|\frac{1}{n}\right|, \left|\frac{\sin n}{n}\right|\right\}$$

má limitu 0

pro $n \to \infty$

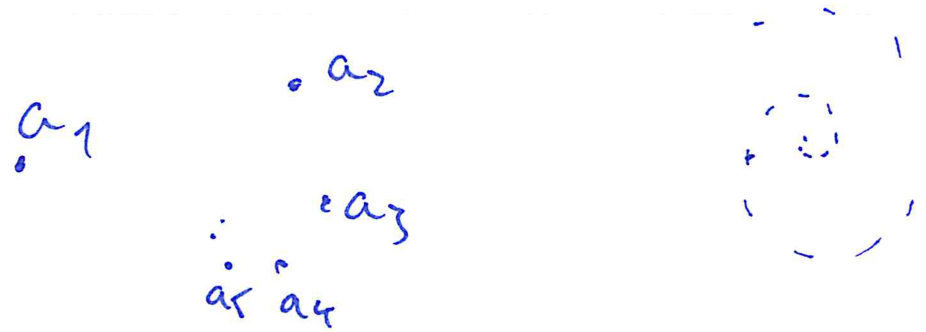
Obecně platí, že limita v $\mathbb{R}^d$ Δ každou z nějž... $\underbrace{\text{limitu v}}_{\text{posloupnosti}}$

znamená v kartézské... po složkách

Něco již v AN1 – limita posloupnosti

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K)(\forall n > K)(|a_n - a| < \varepsilon)$$



Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ prvků MP (P,ρ) je Cauchyovská, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k)(\forall n > k, m > k)(\rho(a_n, a_m) < \varepsilon)$$

~~Pozn~~

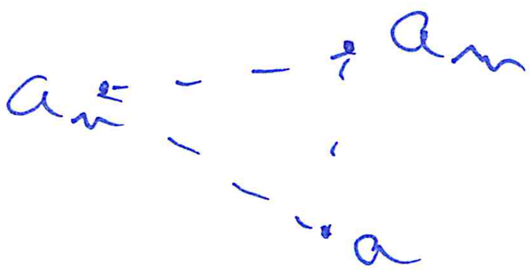
Lem:

Je-li $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost v MP ~~, pak~~ (P,ρ), pak je Cauchyovská v (P,ρ).

Důkaz:

$\rho(a_n,a)\to 0$ ... $(\forall \varepsilon>0)(\exists k)(\forall n>k)\left(\rho(a_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\rho(a_n,a_m)\le \underbrace{\rho(a_n,a)}_{\substack{n>k\\ <\frac{\varepsilon}{2}}}+\underbrace{\rho(a,a_m)}_{\substack{m>k\\ <\frac{\varepsilon}{2}}}<\varepsilon$$



Platí opak? Je Cauchyovská posloupnost konvergentní?

Příklad: MP .. $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ ANO

vzdálenost na číselné ose

MP .. $(\mathbb{Q}, |\cdot - \cdot|)$ NE

$a_1 = 1, \ a_2 = 1.4, \ a_3 = 1.41 \ \ldots$

přidáváme cifry desetinného rozvoje $\sqrt{2}$.

$a_n \in \mathbb{Q}, \ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\{a_n\}$ je konvergentní v $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$, tedy je v $\mathbb{R}$ Cauchyovská, tedy je Cauchyovská i v $\mathbb{Q}$, ale není v $\mathbb{Q}$ konvergentní, protože $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Definice:

MP (P,ρ) nazveme ~~úplný~~ úplným metrickým prostorem, pokud je každá Cauchyovská posloupnost prvků z P ~~konverg~~ konvergentní v (P,ρ).

Příklad: $(\mathbb{R}^2, \|\cdot - \cdot\|_2)$ je úplný metrický prostor

1, 2, ∞ - kterákoliv z předchozích

$(\mathbb{Q}^2, \|\cdot - \cdot\|)$ není úplný metrický prostor