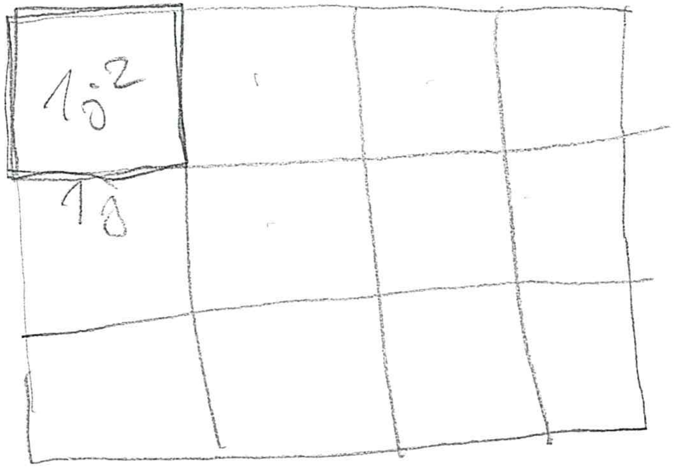
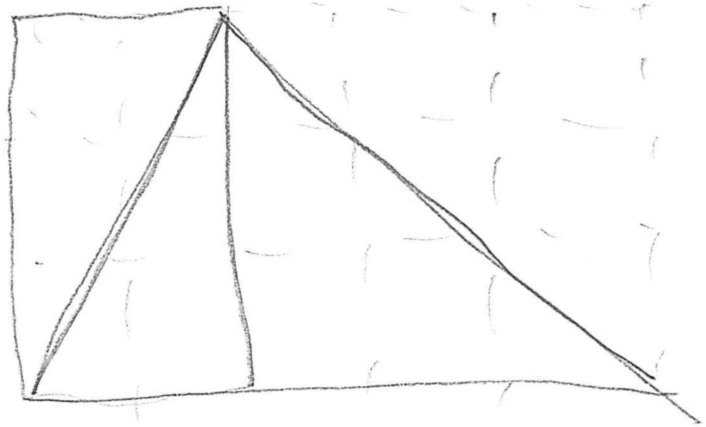
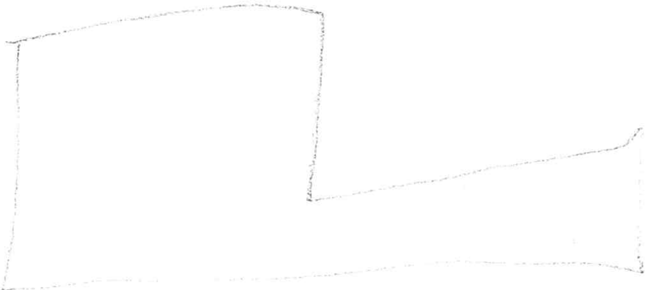

$1\,\dot{o}^2$
$1\,\dot{o}$





Obsah, objem je zobrazení, které

$M \subseteq \mathbb{R}^2$ přiřadí číslo

$M \subseteq \mathbb{R}^3$ — " — $\Big\}\ \sigma(M)$

vlastnosti tohoto zobrazení

M je obdélník o stranách a, b .. obsah je $a \cdot b$

M je kvádr a, b, c objem je $a \cdot b \cdot c$

$M = M_1 \cup M_2$, $M_2 \cap M_3 = \emptyset$

1) $\sigma(M) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2)$ (odtud $\sigma(\emptyset) = 0$)

aditivita

2) $\sigma(M) \geq 0$ pozitivita

σ-aditivita : $\sigma(M_1 \cup M_2 + \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(M_i)$

$M_i \cap M_j = \emptyset$

pro $i \neq j$

monotonie :

$M = M_1 \cup M_2 \quad M \supseteq M_1 ,$

$M_1 \cap M_2 = \emptyset$

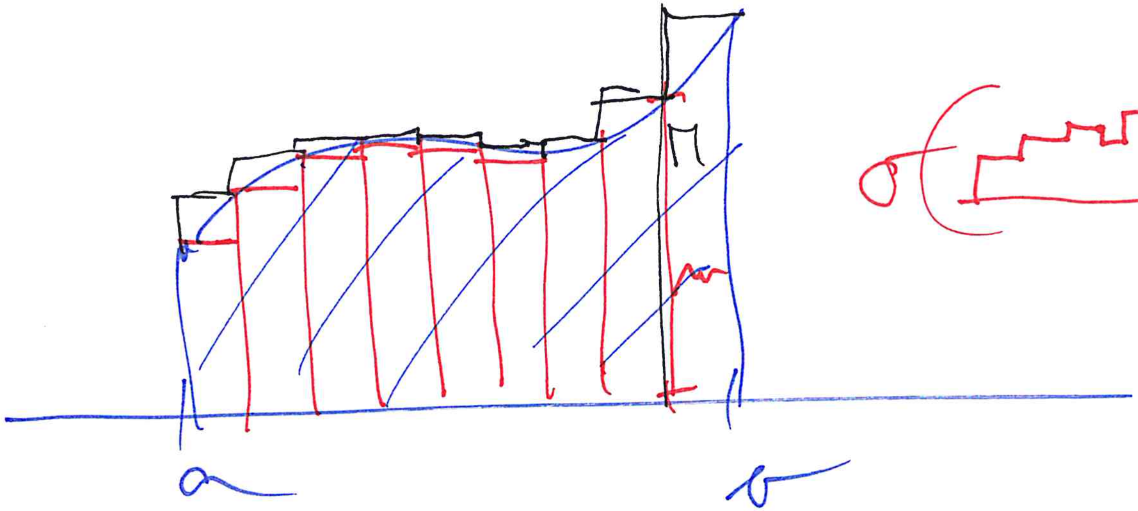
$\cancel{\sigma(M)}$

$\sigma(M) = \sigma(M_1) + \underbrace{\sigma(M_2)}_{\geq 0}$

$\sigma(M) \geq \sigma(M_1)$

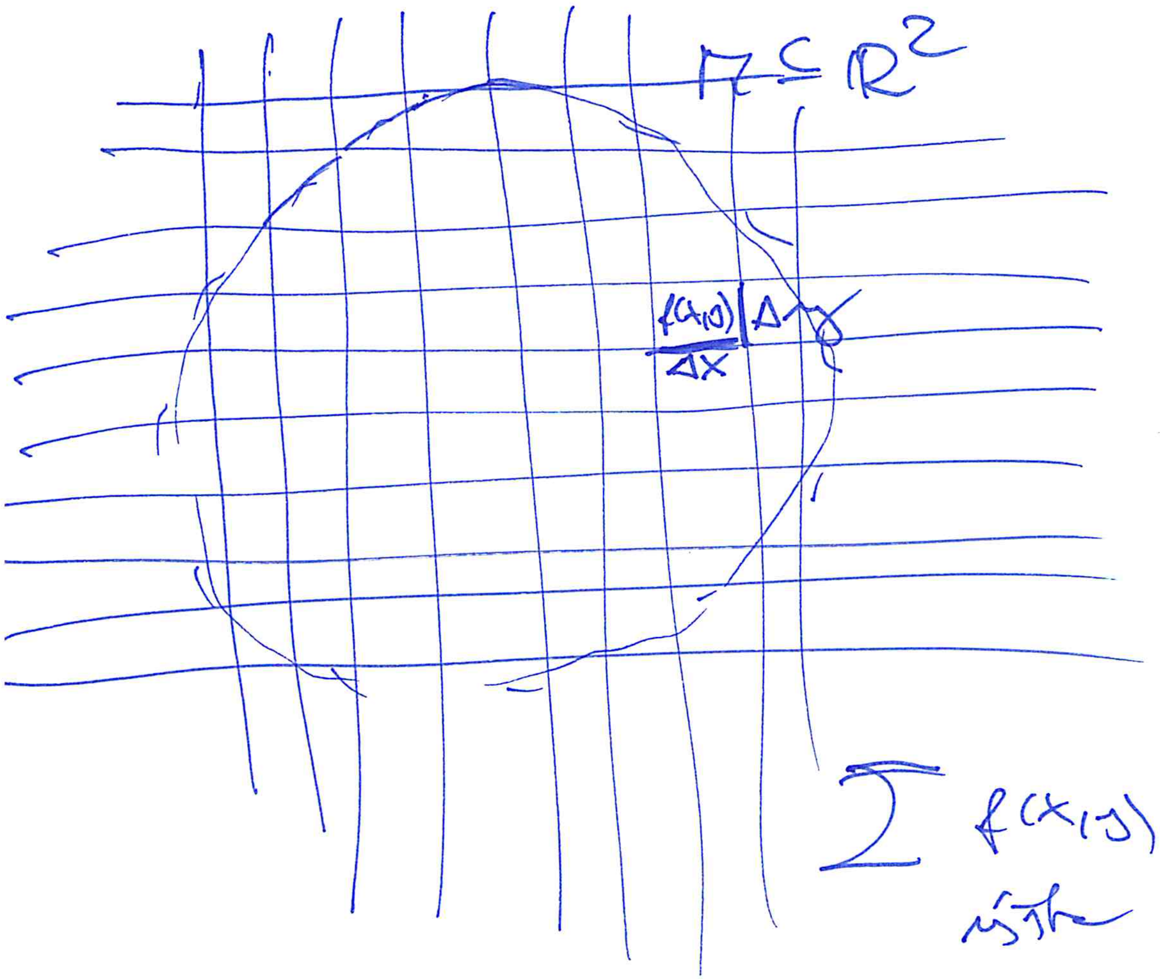
$\forall N \subseteq M$, pak $\sigma(N) \leq \sigma(M)$

Riemannův integrál



$$\sigma(\quad) \le \sigma(M) \le \sigma(\quad)$$

Dvojný integrál



značení:

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\sum f(x,y)\cdot\Delta x\cdot\Delta y$$

nějak

$$m \le f(x,y) \le M$$

dolní integrální součet

$$\sum m\,\Delta x\,\Delta y$$

horní integrální součet

$$\sum M\,\Delta x\,\Delta y$$

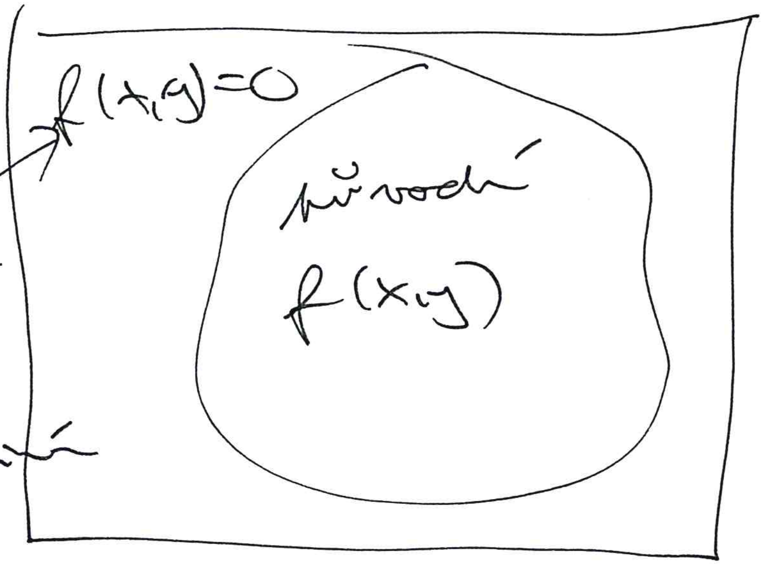
dolní integrál: supremum dolních integrálních součtů
horní — " — : infimum horních — " — —

pokud dolní integrál = horní integrál,

řekneme, že f má na M Riemannův integrál

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy$$

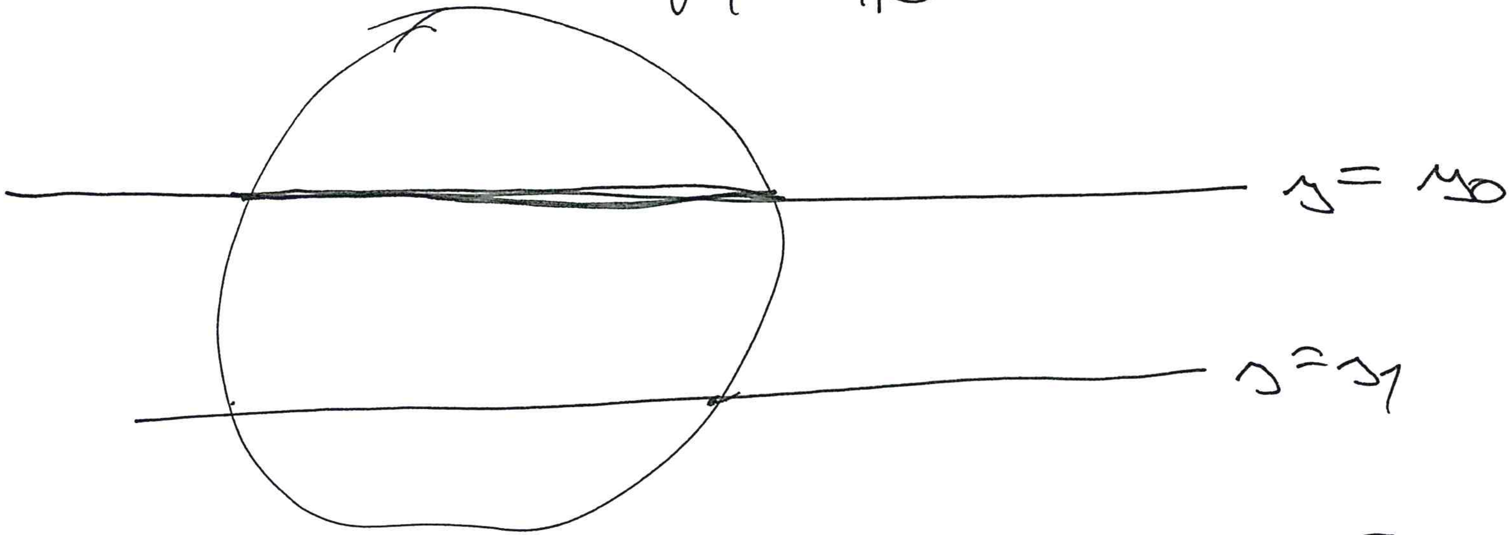
Jak rozložíme A obvejovými obdélníky!



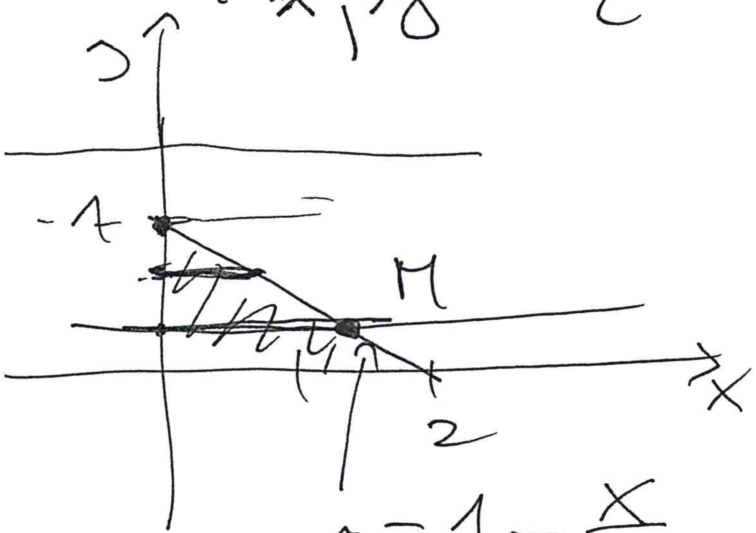
přidám nulu, integrování přes obdélník

Meze v dvojném integrálu

$$M \subseteq \mathbb{R}^2$$



$$M_{*,y} = \{x \in \mathbb{R} : [x,y] \in M\}$$



$y > 1$ je $M_{*,y} = \emptyset$

$y = 1$ $\quad M_{*,y} = \{0\}$

$y \in [0,1)$ $\quad M_{*,y} = [0, \cancel{1-\frac{y}{2}}\ 2-2y]$

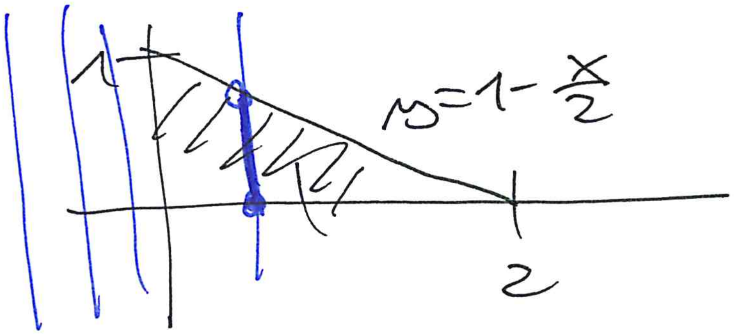
$y < 0$ $\quad M_{*,y} = \emptyset$

$$y = 1 - \frac{x}{2} \qquad x = 2-2y$$

$$2y = 2 - x$$

~~$M_{x,*}$~~

$$M_{x,*} = \{ y \in \mathbb{R} : [x,y] \in M \}$$



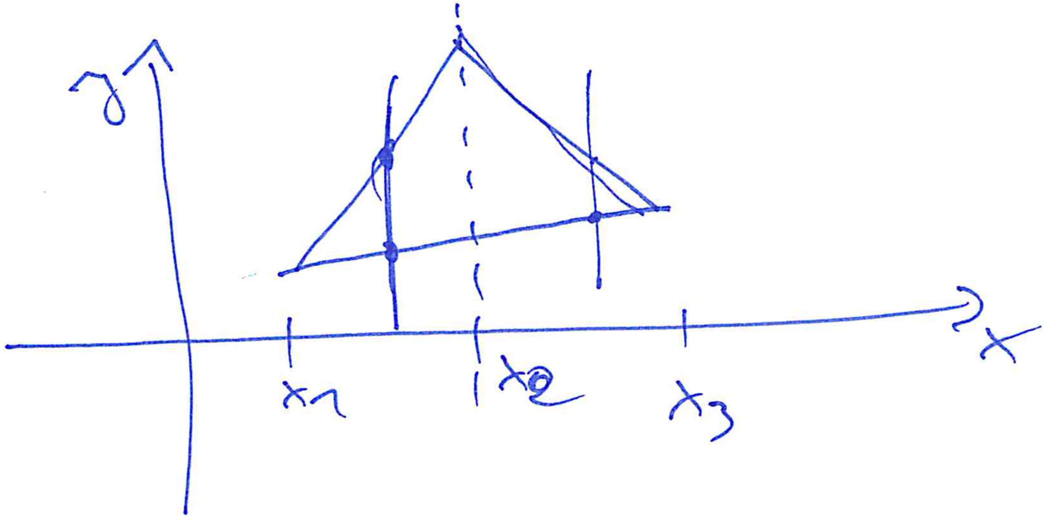
$x < 0 \quad M_{x,*} = \emptyset$

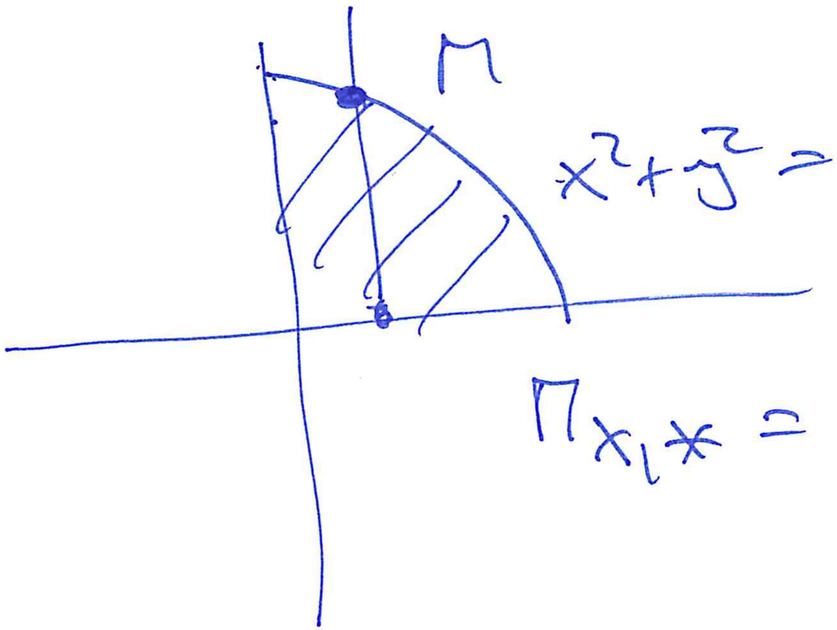
$x = 0 \quad M_{x,*} = [0,1]$

$x \in [0,2) \quad M_{x,*} = [0, 1 - \frac{x}{2}]$

$x = 2 \quad M_{x,*} = \{0\}$

$x > 2 \quad M_{x,*} = \emptyset$





$x^2+y^2=1$

$M_{x,*} = [0, \sqrt{1-x^2}]$