Metrika odvozená od normy

$\rho(a,b) = \|a-b\|$

1) $\rho(a,b) = \rho(b,a)$:

$\rho(a,b) = \|a-b\| = |-1| \cdot \|b-a\|$ $\xrightarrow{a-b}$

$\rho(b,a) = \|b-a\|$

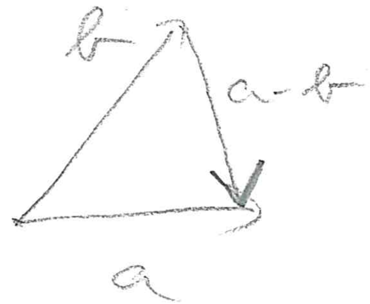
OK

$b-a = -(a-b)$

$\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

$\alpha \in \mathbb{R}$

v je vektor



2) $\rho(a,b) \geq 0$ $\qquad \|a-b\| \geq 0$

$\rho(a,b) = 0 \iff a = b$ $\qquad \|a-b\| = 0 \iff a-b = o$

OK

3) $\rho(a,c) \leq \rho(a,b) + \rho(b,c)$

$\|a-c\| \leq \|a-b\| + \|b-c\|$

$u+v$ $\qquad u = a-b$ $\qquad v = b-c$ .. $u+v = a-c$

Δ-ová nerovnost pro normy:

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Diskrétní metrika $\quad \rho(a,b) = \begin{cases} 0 & a = b \\ 1 & a \neq b \end{cases}$

1) $\rho(a,b) = \rho(b,a)$ ok

2) $\rho(a,b) \geq 0$

$\rho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

3) $\rho(a,c) \leq \rho(a,b) + \rho(b,c)$

$a = c$

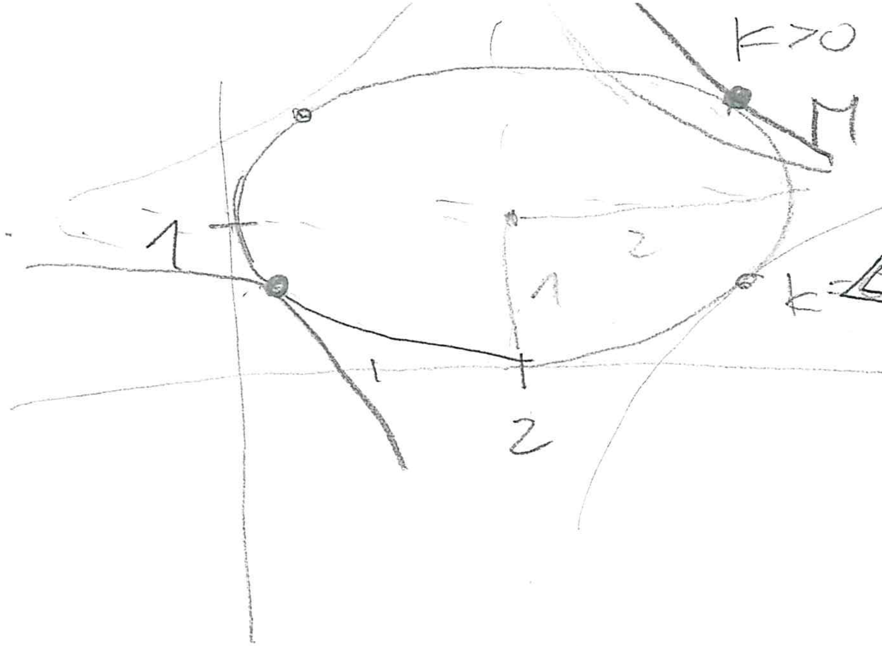
$0 \quad \leq \quad 0+0, \; 0+1, \; 1+0, \; 1+1$ ok

$a \neq c$

$1 \quad \leq \quad 0+1, \; 1+0, \; 1+1$ ok

naráz $\nexists$ $\quad b = a$

oboje $\quad b = c$



$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1}}_{g(x,y)} = 1\right\}$$

extrémy funkce $f(x,y) = (x-2)(y-1)$ na množině M

$$(x-2)(y-1) = K$$

$$y-1 = \frac{K}{x-2}$$

$$y = 1 + \frac{K}{x-2}$$

M je uzavřená (obsahuje všechny své hraniční body) a omezená, f je spojitá na M ... odtud plyne, že f nabývá na M maximální a minimální hodnoty

$$\text{grad } f = (y-1,\ x-2)$$

$$\text{grad } g = \left(\frac{2(x-2)}{4},\ \frac{2(y-1)}{1}\right)$$

Metoda Lagrangeových multiplikátorů:

Pokud funkce f nabývá na křivce $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=c\}$

extrému v bodě $A=[x_0,y_0]$ a ~~pokud~~ f má v bodě A

~~obě~~ gradient a g má v bodě A nenulový gradient,

pak existuje $\lambda\in\mathbb{R}$ takové, že

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=\lambda \operatorname{grad} g(x_0,y_0)$$

Hledáme extrémy v naší úloze:

$$(y-1,\ x-2)=\lambda\left(\frac{x-2}{2},\ 2(y-1)\right)$$

po složkách

$$y-1=\frac{\lambda}{2}(x-2) \qquad \frac{(x-2)^2}{4}+(y-1)^2=1$$

$$x-2=2\lambda(y-1)$$

$$y-1=\frac{\lambda}{2}\cdot 2\lambda(y-1)$$

$$y-1=\lambda^2(y-1) \quad \begin{cases} y=1 \ldots x=2 \ldots 0=1 \quad \times \\ \lambda^2=1 \quad \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=-1 \end{cases} \end{cases}$$

1) $\lambda=1$: $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$

$$\frac{(x-2)^2}{4}+(y-1)^2=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{1}{4}(x-2)^2=1$$

$$(x-2)^2=2$$

$x=2\pm\sqrt{2}$ $\quad y=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\lambda=-1$

⋮

$x=2\pm\sqrt{2}$

$y=1\mp\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(x,y) = (-x-2)(-y-1) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

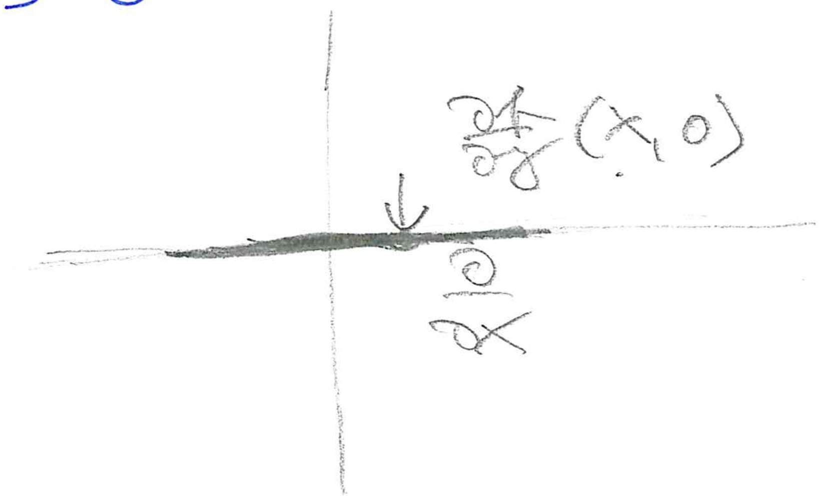
NEZÁMĚNNOST SMÍŠENÝCH DERIVACÍ

$$f(x,y) = xy \underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{\in [-1,1]}$$

stejně rozšíříme do bodu $[0,0]$ hodnotou nula

$0 \cdot$ omezený jest $\to 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$



$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot 1 \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x \cdot y \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)'_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x \cdot \frac{x^2-0}{x^2+0} = x \quad \text{pro } x \neq 0 \quad y=0$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$: [illegible] [illegible] $x \in \mathbb{R}$

$f(0,y) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 1$

D.Ú. : $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -1$