Příklady do písemné zkoušky z AN3

5. ledna 2021

Ještě můžou být malé změny.

1. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada a pro která konverguje absolutně.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^k(k+1)}(x+1)^k$$

1a
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}x^k$$

2. Vyjádřete funkci f jako součet mocninné řady se středem v bodě $a = 1$ a určete poloměr konvergence této řady.
$$f : x \mapsto \frac{x+1}{x^2+x-6}$$

2a se středem v bodě $a = 2$
$$f : x \mapsto \frac{x+1}{x^2+4x+4}$$

3. Vypočtěte limity funkce f po všech přímkách v bodě, ve kterém funkce není definovaná. Co odtud plyne pro dvojnou limitu v tomto bodě?
$$f(x,y) = \frac{(x+1)(y-1)}{(x+1)^2+(x+y)^2}$$

3a
$$f(x,y) = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(x+y)^2}$$

3b
$$f(x,y) = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2+(x+y)^2}$$

4. Zjistěte, zda lze funkci f spojitě rozšířit.
$$f(x,y) = \frac{(x+1)(y-1)}{(x+1)^2+(x+y)^2}$$

4a
$$f(x,y) = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(x+y)^2}$$

4b

$$f(x,y)=\frac{(x+1)^3}{(x+1)^2+(x+y)^2}$$

5. Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $\mathbf{a}$ podle vektoru $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$.

$$f(x,y)=\frac{x\sqrt{2y}-\sqrt{x+3}}{(x-y)^2}\qquad \mathbf{a}=[2,1]$$

5a

$$\mathbf{a}=[-1,1],\qquad f(\mathbf{a})=0,\qquad f(x,y)=\frac{(x+1)^2(y-1)}{(x+1)^2+(x+y)^2}\ \text{pro } \mathbf{x}\neq\mathbf{a}$$

6. Určete, zda má funkce f v bodě $\mathbf{a}$ slabou derivaci a případně ji vypočtěte.

$$f(x,y)=\frac{x\sqrt{2y}-\sqrt{x+3}}{(x-y)^2}\qquad \mathbf{a}=[2,1]$$

6a

$$\mathbf{a}=[-1,1],\qquad f(\mathbf{a})=0,\qquad f(x,y)=\frac{(x+1)^2(y-1)}{(x+1)^2+(x+y)^2}\ \text{pro } \mathbf{x}\neq\mathbf{a}$$

Poznámka: v následujících úlohách derivace bez přívlastku znamená silnou derivaci.

7. Určete derivaci funkce f v bodě $\mathbf{a}$. Derivaci použijte k napsání rovnice tečné roviny v bodě $\mathbf{a}$.

$$f(x,y)=\frac{x\sqrt{2y}-\sqrt{x+3}}{(x-y)^2}\qquad \mathbf{a}=[2,1]$$

8. Vypočtěte gradient funkce f v bodě $\mathbf{a}$ a zjistěte, zda má f v bodě $\mathbf{a}$ derivaci.

$$\mathbf{a}=[-1,1],\qquad f(\mathbf{a})=0,\qquad f(x,y)=\frac{(x+1)^2(y-1)}{(x+1)^2+(y-1)^2}\ \text{pro } \mathbf{x}\neq\mathbf{a}$$

8a

$$f(x,y)=\frac{(x+1)(y-1)^3}{(x+1)^2+(y-1)^2}\qquad \mathbf{a}=[-1,1]$$

9. Izokřivky?

10. Nalezněte maximální a minimální hodnotu funkce f na elipse o hlavních vrcholech $A = [0, 0]$, $B = [6, 0]$ a vedlejší poloose o velikosti jedna. Výpočet zkontrolujte obrázkem.

$$f(x, y) = 3x - y$$

10a Extrémy na oblouku hyperboly H

$$H = \{[x, y] \in \mathbb{R} : x \in [1/2, 2], xy = 1\} \qquad f(x, y) = 3x + 4y$$

10b Extrémy na množině H

$$H = \{[x, y] \in \mathbb{R} : x \in [1/2, 2], y \in [1/x, 2]\} \qquad f(x, y) = 3x + 4y$$

10c Extrémy na množině H

$$H = \{[x, y] \in \mathbb{R} : x \in [1/2, 2], y \in [1/x, 2]\} \qquad f(x, y) = (x + y - 1)^2$$

11. Vypočtěte dvojný integrál funkce f přes trojúhelník o vrcholech $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[0, 2]$.

$$f(x, y) = (x + y)^2$$

11a Přes kruh se středem v bodě $S = [0, 2]$ a s počátkem soustavy souřadné ležící na jeho hranici.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

12. Vypočtěte x-ovou souřadnici těžiště obrazce O. Výsledek zkontrolujte obrázkem.

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R} : 3 - x \leq y \leq 5 - x^2\}$$

12a y-ovou souřadnici

13. Vypočtěte vzdálenost těžiště čtvrtkruhu od středu příslušné kružnice.